# 等方的なテンソル

連続体の力学では物体を等方的とした場合が多く出てくるので、等方的な 4 階テンソルの一般形を求めます。

$n$ 階テンソル $T$ はそのテンソル成分が $n$ 個の添え字によって $T_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ と書け、その変換則が直交行列 $L_{ij}$ によって

$$T'_{k_1k_2\cdots k_n} = L_{k_1a_1}L_{k_2a_2}\cdots L_{k_na_n}T_{a_1a_2\cdots a_n}$$

と与えられるものです。例えば、1 階テンソル、2 階テンソルなら

$$T'_k = L_{ka}T_a \ , \ T'_{kl} = L_{ka}L_{lb}T_{ab}$$

となります。見てわかるように、1 階テンソルはベクトルです。ここではこの程度の知識で十分なのでこれ以上のことは省きます (一般相対性理論の「テンソル解析」や数学の「直交座標でのテンソル」参照)。

等方的な 4 階テンソル (isotropic tensor) の一般的な形を求めます。等方的 (isotropy) は特別な方向 (特別な座標軸の方向) がなく、どの方向から見ても同じ性質を持つことです。なので、物体に対してどのようにデカルト座標を設定してもテンソルの成分が同じになる場合とも言えます。実用的には、回転変換でテンソルの成分が変わらないということです。

ここでは、面倒ですが細かいことを考えずに $n$ 階テンソルの場合が求められる方法を使います。

まず、1 階テンソルであるベクトルから見ていきます (0 階のテンソルであるスカラーは定義から回転変換で不変なので等方的)。等方的であるなら回転変換の前後でベクトル成分は同じなので、ベクトル $\boldsymbol{a}$ の成分 $a_i$ は回転変換 $L_{ij}$ によって

$$a'_i = L_{ij}a_j = a_i$$

ベクトルの微小な角度 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ による回転は

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} + \Delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{a} \quad (\Delta\boldsymbol{\theta} = \Delta\theta_1\boldsymbol{e}_1 + \Delta\theta_2\boldsymbol{e}_2 + \Delta\theta_3\boldsymbol{e}_3)$$

これはレヴィ・チビタ記号によってベクトル積が

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_i = \epsilon_{ijk}a_jb_k$$

と書けることから

$$a'_i = a_i + \epsilon_{ijk}\Delta\theta_ja_k = a_k\delta_{ik} + \epsilon_{ijk}\Delta\theta_ja_k = (\delta_{ik} + \epsilon_{ijk}\Delta\theta_j)a_k = L_{ik}a_k$$

今は $a_i = L_{ik}a_k$ なので

$$\epsilon_{ijk}\Delta\theta_ja_k = 0$$

ここでレヴィ・チビタ記号の関係

$$\epsilon_{iab}\epsilon_{ijk} = \delta_{aj}\delta_{bk} - \delta_{ak}\delta_{jb} \tag{1}$$

を使うと

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon_{iab}\epsilon_{ijk}\Delta\theta_j a_k \\ &= (\delta_{aj}\delta_{bk} - \delta_{ak}\delta_{jb})\Delta\theta_j a_k \\ &= \Delta\theta_a a_b - \Delta\theta_b a_a \\ \Delta\theta_a a_b &= \Delta\theta_b a_a \end{aligned} \tag{2}$$

と書けます。

等方的であるならどんな回転に対してもこれが成立している必要があります。例えば、$\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2 = \Delta\theta_3 = \Delta\theta$ としたとき、$a_i$ も全て同じ値なら (2) は成立します。なので、$a_i$ の全ての成分が同じとき、$\Delta\theta$ で全方向に回転させれば、$a_i$ は不変です。しかし、$a_i$ の全ての成分が同じとき、$\Delta\theta_1 \neq \Delta\theta_2 \neq \Delta\theta_3$ の回転に対して、(2) は $a_i = 0$ でないと成立しません。よって、$a_i = 0$ でないと成立しない場合があるので、あらゆる回転に対して不変であるためには、全ての成分が 0 でなければいけません。というわけで、等方的なベクトルはゼロベクトルのみです。

2 階のテンソルの場合も簡単に分かります。回転変換の行列は直交行列 $L_{ij}$ なので、2 階テンソル $A_{ij}$ が等方的であるなら

$$A'_{ij} = L_{ia}L_{jb}A_{ab} = A_{ij}$$

となります。$L_{ia}L_{jb}$ は $\Delta\theta_i$ の 1 次まででで

$$L_{ia}L_{jb} = (\delta_{ia} + \epsilon_{ika}\Delta\theta_k)(\delta_{jb} + \epsilon_{jkb}\Delta\theta_k) \simeq \delta_{ia}\delta_{jb} + \delta_{ia}\epsilon_{jkb}\Delta\theta_k + \delta_{jb}\epsilon_{ika}\Delta\theta_k$$

これから

$$\begin{aligned} L_{ia}L_{jb}A_{ab} &= (\delta_{ia}\delta_{jb} + \delta_{ia}\epsilon_{jkb}\Delta\theta_k + \delta_{jb}\epsilon_{ika}\Delta\theta_k)A_{ab} \\ &= A_{ij} + \epsilon_{jkb}\Delta\theta_k A_{ib} + \epsilon_{ika}\Delta\theta_k A_{aj} \\ &= A_{ij} + \Delta\theta_k(\epsilon_{jkb}A_{ib} + \epsilon_{ika}A_{aj}) \end{aligned}$$

よって

$$\epsilon_{jkb}A_{ib} + \epsilon_{ika}A_{aj} = 0$$

となり、等方的です。これにもレヴィ・チビタ記号の関係を使って

$$
\begin{aligned}
0 &= \epsilon_{jkb}A_{ib} + \epsilon_{ika}A_{aj} \\
&= \epsilon_{kjb}A_{ib} + \epsilon_{kia}A_{aj} \\
&= \epsilon_{kjl}\epsilon_{kjb}A_{ib} + \epsilon_{kjl}\epsilon_{kia}A_{aj} \\
&= (\delta_{jj}\delta_{lb} - \delta_{jb}\delta_{lj})A_{ib} + (\delta_{ji}\delta_{la} - \delta_{ja}\delta_{li})A_{aj} \\
&= \delta_{jj}A_{il} - \delta_{lj}A_{ij} + A_{li} - \delta_{li}A_{jj} \\
&= 3A_{il} - A_{il} + A_{li} - \delta_{li}A_{jj} \\
&= 2A_{il} + A_{li} - \delta_{li}A_{jj} \\
2A_{il} + A_{li} &= \delta_{li}A_{jj}
\end{aligned}
$$

$i = 1, 2, 3$ から、$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$ です。$A_{jj} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ は $A_{ij}$ のトレースです。これの右辺は $i$ と $l$ を入れ替えても変わらないです ($\delta_{ij} = \delta_{ji}$)。このため、左辺も入れ替えで同じになり

$$
2A_{il} + A_{li} = 2A_{li} + A_{il}
$$

なので、$A_{ij}$ は対称 $A_{ij} = A_{ji}$ です。対称であることから

$$
\begin{aligned}
3A_{ij} &= \delta_{ij}A_{aa} \\
A_{ij} &= \frac{A_{aa}}{3}\delta_{ij}
\end{aligned}
$$

となり、これが等方的な 2 階テンソルの形になります。右辺は $\delta_{ij}$ に比例しているだけなので、等方的な 2 階テンソルの成分は対角行列です。

連続体の力学で重要なのは 4 階テンソルなので、4 階テンソルでも同じ方法で求めます。4 階テンソル $M_{ijkl}$ に対して

$$
M'_{ijkl} = L_{ia}L_{jb}L_{kc}L_{ld}M_{abcd} = M_{ijkl}
$$

として、同じことをします。$L_{ia}L_{jb}L_{kc}L_{ld}$ は

$$
\begin{aligned}
L_{ia}L_{jb}L_{kc}L_{ld} &= (\delta_{ia} + \epsilon_{isa}\Delta\theta_s)(\delta_{jb} + \epsilon_{jsb}\Delta\theta_s)(\delta_{kc} + \epsilon_{ksc}\Delta\theta_s)(\delta_{ld} + \epsilon_{lsd}\Delta\theta_s) \\
&\simeq \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{kc}\delta_{ld} + \delta_{jb}\delta_{kc}\delta_{ld}\epsilon_{isa}\Delta\theta_s \\
&\quad + \delta_{ia}\delta_{kc}\delta_{ld}\epsilon_{jsb}\Delta\theta_s + \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{ld}\epsilon_{ksc}\Delta\theta_s + \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{kc}\delta_{ld}\epsilon_{lsd}\Delta\theta_s \\
&= \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{kc}\delta_{ld} + \delta_{jb}\delta_{kc}\delta_{ld}\epsilon_{isa}\Delta\theta_s \\
&\quad + \delta_{ia}\delta_{kc}\delta_{ld}\epsilon_{jsb}\Delta\theta_s + \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{ld}\epsilon_{ksc}\Delta\theta_s + \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{kc}\epsilon_{lsd}\Delta\theta_s
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
&(\delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{kc}\delta_{ld} + \delta_{jb}\delta_{kc}\delta_{ld}\epsilon_{isa}\Delta\theta_s \\
&\qquad + \delta_{ia}\delta_{kc}\delta_{ld}\epsilon_{jsb}\Delta\theta_s + \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{ld}\epsilon_{ksc}\Delta\theta_s + \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{kc}\epsilon_{lsd}\Delta\theta_s)M_{abcd} \\
&\quad = M_{abcd}\delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{kc}\delta_{ld} + M_{abcd}\delta_{jb}\delta_{kc}\delta_{ld}\epsilon_{isa}\Delta\theta_s \\
&\qquad + M_{abcd}\delta_{ia}\delta_{kc}\delta_{ld}\epsilon_{jsb}\Delta\theta_s + M_{abcd}\delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{ld}\epsilon_{ksc}\Delta\theta_s + M_{abcd}\delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{kc}\epsilon_{lsd}\Delta\theta_s \\
&\quad = M_{ijkl} + M_{ajkl}\epsilon_{isa}\Delta\theta_s + M_{ibkl}\epsilon_{jsb}\Delta\theta_s + M_{ijcl}\epsilon_{ksc}\Delta\theta_s + M_{ijkd}\epsilon_{lsd}\Delta\theta_s \\
&\quad = M_{ijkl} + (M_{bjkl}\epsilon_{iab} + M_{ibkl}\epsilon_{jsb} + M_{ijcl}\epsilon_{ksc} + M_{ijkd}\epsilon_{lsd})\Delta\theta_s \\
&\quad = M_{ijkl} + (\epsilon_{iab}M_{bjkl} + \epsilon_{jab}M_{ibkl} + \epsilon_{kab}M_{ijbl} + \epsilon_{lab}M_{ijkb})\Delta\theta_a
\end{aligned}
$$

最後は添え字の文字を付け替えているだけです。よって、等方的であるためには

$$\epsilon_{aib}M_{bjkl} + \epsilon_{ajb}M_{ibkl} + \epsilon_{akb}M_{ijbl} + \epsilon_{alb}M_{ijkb} = 0$$

であればいいです。これに $\epsilon_{ais}$ をかければ

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{ais}\epsilon_{aib} &= \delta_{ii}\delta_{sb} - \delta_{ib}\delta_{si} \\
\epsilon_{ais}\epsilon_{ajb} &= \delta_{ij}\delta_{sb} - \delta_{ib}\delta_{sj} \\
\epsilon_{ais}\epsilon_{akb} &= \delta_{ik}\delta_{sb} - \delta_{ib}\delta_{sk} \\
\epsilon_{ais}\epsilon_{alb} &= \delta_{il}\delta_{sb} - \delta_{ib}\delta_{sl}
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
(\delta_{ii}\delta_{sb} - \delta_{ib}\delta_{si})M_{bjkl} = 3M_{sjkl} - M_{sjkl} &= 2M_{sjkl} \\
(\delta_{ij}\delta_{sb} - \delta_{ib}\delta_{sj})M_{ibkl} &= M_{jskl} - \delta_{sj}M_{bbkl} \\
(\delta_{ik}\delta_{sb} - \delta_{ib}\delta_{sk})M_{ijbl} &= M_{kjsl} - \delta_{sk}M_{bjbl} \\
(\delta_{il}\delta_{sb} - \delta_{ib}\delta_{sl})M_{ijkb} &= M_{ljks} - \delta_{sl}M_{bjkb}
\end{aligned}
$$

から

$$2M_{sjkl} + M_{jskl} + M_{kjsl} + M_{ljks} = \delta_{sj}M_{bbkl} + \delta_{sk}M_{bjbl} + \delta_{sl}M_{bjkb} \tag{3a}$$

ここで $M_{bbkl}$ のように添え字に同じ記号が入ってきているものがあります。この添え字は和を取るものなので

$$M_{bbkl} = M_{11kl} + M_{22kl} + M_{33kl}$$

となってります。そうすると、これは $k, l$ によって決まるものなので、2 階のテンソルです。なので、等方的な 2 階のテンソルの形を使って

$$M_{bbkl} = c\delta_{kl}$$

と書けます。

これだけからはまだ決まらなく、さらに同じことを $\epsilon_{ajs}, \epsilon_{aks}, \epsilon_{als}$ に対しても行います。そうすると、それぞれに対して

$$2M_{sjkl} + M_{jskl} + M_{skjl} + M_{slkj} = \delta_{sj}M_{bbkl} + \delta_{jl}M_{sbkb} + \delta_{jk}M_{sbbl} \tag{3b}$$

$$2M_{sjkl} + M_{kjsl} + M_{skjl} + M_{sjlk} = \delta_{kl}M_{sjbb} + \delta_{sk}M_{bjbl} + \delta_{jk}M_{sbbl} \tag{3c}$$

$$2M_{sjkl} + M_{ljks} + M_{slkj} + M_{sjlk} = \delta_{kl}M_{sjbb} + \delta_{jl}M_{sbkb} + \delta_{sl}M_{bjkb} \tag{3d}$$

と計算されます。

ここで、$M_{bbkl}, M_{klbb}$ は同じ等方的な 2 階テンソルによって

$$M_{bbkl} = M_{klbb} = \alpha\delta_{kl}$$

と書けると考えます。同様に

$$M_{sbkb} = M_{bsbk} = \beta\delta_{sk}$$

$$M_{sbbl} = M_{bslb} = \gamma\delta_{jk}$$

とします。そして、これから添え字の交換に

$$M_{bbkl} = M_{klbb}$$

$$M_{sbkb} = M_{bsbk}$$

$$M_{sbbl} = M_{bslb}$$

という関係があることになります。

そうすると、(3a) から (3d) は

$$2M_{sjkl} + M_{jskl} + M_{kjsl} + M_{ljks} = \alpha\delta_{kl}\delta_{sj} + \beta\delta_{jl}\delta_{sk} + \gamma\delta_{sl}\delta_{jk} \tag{4a}$$

$$2M_{sjkl} + M_{jskl} + M_{skjl} + M_{slkj} = \alpha\delta_{kl}\delta_{sj} + \beta\delta_{jl}\delta_{sk} + \gamma\delta_{sl}\delta_{jk} \tag{4b}$$

$$2M_{sjkl} + M_{kjsl} + M_{skjl} + M_{sjlk} = \alpha\delta_{kl}\delta_{sj} + \beta\delta_{jl}\delta_{sk} + \gamma\delta_{sl}\delta_{jk} \tag{4c}$$

$$2M_{sjkl} + M_{ljks} + M_{slkj} + M_{sjlk} = \alpha\delta_{kl}\delta_{sj} + \beta\delta_{jl}\delta_{sk} + \gamma\delta_{sl}\delta_{jk} \tag{4d}$$

この 4 つの右辺は全て同じです。なので 1 つ目 (4a) と 2 つ目 (4b) の和

$$4M_{sjkl}+M_{jskl}+M_{kjsl}+M_{ljks}+M_{jskl}+M_{skjl}+M_{slkj}$$

と 3 つ目 (4c) と 4 つ目 (4d) の和

$$4M_{sjkl}+M_{kjsl}+M_{skjl}+M_{sjlk}+M_{ljks}+M_{slkj}+M_{sjlk}$$

は等しいので

$$\begin{aligned}
0 &= 4M_{sjkl}+M_{jskl}+M_{kjsl}+M_{ljks}+M_{jskl}+M_{skjl}+M_{slkj} \\
&\quad -(4M_{sjkl}+M_{kjsl}+M_{skjl}+M_{sjlk}+M_{ljks}+M_{slkj}+M_{sjlk}) \\
&= 2M_{jskl}-2M_{sjlk} \\
M_{jskl} &= M_{sjlk}
\end{aligned}$$

という関係が分かります。同じようにして、2 つ足したもの同士の差を計算していくと

$$M_{jskl}=M_{sjlk}=M_{lksj}=M_{kljs} \tag{5}$$

となっていることが分かります。

(4b) から (4d) はもう使いません。(5) を使って 1 つ目 (4a) の左辺をまずは

$$2M_{sjkl}+M_{jskl}+M_{kjsl}+M_{ljks}=2M_{sjkl}+M_{sjlk}+M_{slkj}+M_{skjl}$$

と書き換え

$$2M_{sjkl}+M_{sjlk}+M_{slkj}+M_{skjl}=\alpha\delta_{kl}\delta_{sj}+\beta\delta_{jl}\delta_{sk}+\gamma\delta_{sl}\delta_{jk} \tag{6}$$

ここで付けている添え字は勝手に決めたものなので、全ての添え字の文字を付け直しても問題は起きません。なので、$j$ を $k$、$k$ を $l$、$l$ を $j$ と書き直すことにすれば (6) は

$$2M_{sklj}+M_{skjl}+M_{sjlk}+M_{slkj}=\alpha\delta_{lj}\delta_{sk}+\beta\delta_{kj}\delta_{sl}+\gamma\delta_{sj}\delta_{kl}$$

とできます。さらにこれから、$k$ を $l$、$l$ を $j$、$j$ を $k$ に書き直せば

$$2M_{sljk}+M_{slkj}+M_{skjl}+M_{sjlk}=\alpha\delta_{jk}\delta_{sl}+\beta\delta_{lk}\delta_{sj}+\gamma\delta_{sk}\delta_{lj}$$

というわけで、添え字の書き換えで、1 つ目 (4a) から

$$2M_{sjkl} + M_{sjlk} + M_{slkj} + M_{skjl} = \alpha\delta_{kl}\delta_{sj} + \beta\delta_{jl}\delta_{sk} + \gamma\delta_{sl}\delta_{jk} \tag{7a}$$

$$2M_{sklj} + M_{skjl} + M_{sjlk} + M_{slkj} = \alpha\delta_{jl}\delta_{sk} + \beta\delta_{sl}\delta_{jk} + \gamma\delta_{kl}\delta_{sj} \tag{7b}$$

$$2M_{sljk} + M_{slkj} + M_{skjl} + M_{sjlk} = \alpha\delta_{sl}\delta_{jk} + \beta\delta_{kl}\delta_{sj} + \gamma\delta_{jl}\delta_{sk} \tag{7c}$$

という 3 つの式が出来ました。

これの右辺を縦に見てみると、$\alpha, \beta, \gamma$ のクロネッカーデルタが同じ形になっています。なので、この 3 つを足したとき、右辺は

$$(\alpha + \beta + \gamma)(\delta_{kl}\delta_{sj} + \delta_{jl}\delta_{sk} + \delta_{sl}\delta_{jk})$$

となります。左辺の和はまとめれば

$$2(M_{sjkl} + M_{sklj} + M_{sljk}) + 3(M_{sjlk} + M_{slkj} + M_{skjl})$$

となるので

$$2(M_{sjkl} + M_{sklj} + M_{sljk}) + 3(M_{sjlk} + M_{slkj} + M_{skjl}) = (\alpha + \beta + \gamma)(\delta_{kl}\delta_{sj} + \delta_{jl}\delta_{sk} + \delta_{sl}\delta_{jk})$$

右辺は $k, l$ を入れ替えても

$$\delta_{lk}\delta_{sj} + \delta_{jk}\delta_{sl} + \delta_{sk}\delta_{jl} = \delta_{kl}\delta_{sj} + \delta_{jl}\delta_{sk} + \delta_{sl}\delta_{jk}$$

となって、不変なので左辺も $k, l$ の入れ替えで不変です。なので

$$\begin{aligned}2(M_{sjkl} + M_{sklj} + M_{sljk}) + 3(M_{sjlk} + M_{slkj} + M_{skjl}) &= 2(M_{sjlk} + M_{slkj} + M_{skjl}) + 3(M_{sjkl} + M_{sklj} + M_{sljk}) \\ (M_{sjkl} + M_{sklj} + M_{sljk}) &= (M_{sjlk} + M_{slkj} + M_{skjl})\end{aligned}$$

となっていることが分かり

$$\begin{aligned}5(M_{sjlk} + M_{slkj} + M_{skjl}) &= (\alpha + \beta + \gamma)(\delta_{kl}\delta_{sj} + \delta_{jl}\delta_{sk} + \delta_{sl}\delta_{jk}) \\ M_{sjlk} + M_{slkj} + M_{skjl} &= \frac{1}{5}(\alpha + \beta + \gamma)(\delta_{kl}\delta_{sj} + \delta_{jl}\delta_{sk} + \delta_{sl}\delta_{jk})\end{aligned}$$

これの左辺に (7a) を入れて

$$\begin{aligned}-2M_{sjkl} + (\alpha\delta_{kl}\delta_{sj} + \beta\delta_{jl}\delta_{sk} + \gamma\delta_{sl}\delta_{jk}) &= \frac{1}{5}(\alpha + \beta + \gamma)(\delta_{kl}\delta_{sj} + \delta_{jl}\delta_{sk} + \delta_{sl}\delta_{jk}) \\ M_{sjkl} &= \frac{1}{2}(\alpha\delta_{kl}\delta_{sj} + \beta\delta_{jl}\delta_{sk} + \gamma\delta_{sl}\delta_{jk}) - \frac{1}{10}(\alpha + \beta + \gamma)(\delta_{kl}\delta_{sj} + \delta_{jl}\delta_{sk} + \delta_{sl}\delta_{jk}) \\ &= \frac{1}{10}(4\alpha - \beta - \gamma)\delta_{kl}\delta_{sj} + \frac{1}{10}(-\alpha + 4\beta - \gamma)\delta_{jl}\delta_{sk} + \frac{1}{10}(-\alpha - \beta + 4\gamma)\delta_{sl}\delta_{jk}\end{aligned}$$

よって、等方的な 4 階テンソルの一般的な形は、係数を付け直せば

$$M_{ijkl} = a_1\delta_{ij}\delta_{kl} + a_2\delta_{ik}\delta_{jl} + a_3\delta_{il}\delta_{jk}$$

となります。