線形弾性体

連続体力学で固体を扱うときに出てくる線形弾性体の式を導出します。

連続体の力学での物体の運動は運動量方程式 (コーシーの運動方程式) によって与えられます。しかし、運動量方程式において応力テンソルは未知のままになっているので、応力テンソルを与えないと具体的な意味を持ちません (運動方程式をもとにしているために力がどうなっているかは分からない)。なので、応力テンソルがどうなっているかですが、これは現実の物体 (実験結果) を説明できるような仮定を組み込むしかないです (現実の現象を説明できるモデルを作る)。

そのための基本となる物体 (現実の物体でなく理論を作るうえでの仮想的な物体) の性質は、均一的 (均質的、homogeneous) と等方的 (isotropic) です。均一的な物体は物体内のどこでも同じ性質を持つことです (応力が位置に陽に依存性しないこと)。等方的な物体は、物体内に特別な方向がなく、どの方向を向いていても同じ性質を持つことです (応力が回転変換で変わらないこと)。均一的でないなら非均一的 (nonhomogeneous)、等方的でないなら異方的 (anisotropic) となります。

応力に関する性質として弾性 (elastic) と粘性 (viscous) があります。弾性は応力が物体の変形 (長さや角度の変化) に依存すること、粘性は応力が変形の割合に依存することです。言い換えれば、弾性では変形勾配、粘性では変形勾配の変化の割合 (変形勾配の位置の偏微分) に依存します。

ここでは弾性を持つ物体である弾性体 (elastic body, elastic solid) を扱うことにし、応力テンソルの関係を線形的にした線形弾性体を見ていきます。

弾性体での応力は変形勾配に依存するとされるのは、変形はひずみテンソルで表され、ひずみテンソルは変形勾配で書かれるからです。このため、応力テンソル σ_{ij} は微小ひずみテンソル e_{ij} に依存すると考えます。そして、均一的として位置の依存性はないとし、微小ひずみテンソルの 1 次のみを含むとして

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}e_{kl} \tag{1}$$

と仮定します。このような応力テンソルとひずみテンソルの関係を与える式を構成方程式 (constitutive equation) と呼びます。今の場合は $\sigma_{ij}(e_{kl})$ を e_{kl} が微小としてテイラー展開したときの 1 次の項だけを取り出し、0 次の項である定数 $\sigma_{ij}(0)$ は含まないとして作っています。$\sigma_{ij}(0)$ を省いているのは変形していないときは応力がないとするためです。c_{ijkl} は現実の物体によって決まる量で、(1) は左辺がテンソル、e_{kl} もテンソルなので c_{ijkl} もテンソルです。大抵の場合で、応力テンソルが対称 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ なときの c_{ijkl} を弾性係数テンソル (elasticity tensor) と呼びます。

応力テンソルと微小ひずみテンソルが (1) のような線形の関係で与えられている物体を線形弾性体 (linear elastic solid) と言い、(1) は線形弾性体の構成方程式です。また、加わっている力（応力）とそれによるズレの関係が線形なので、一般化されたフックの法則 (generalized Hooke's low) とも呼ばれます。

c_{ijkl} は微小ひずみテンソルの対称性 $e_{ij} = e_{ji}$ から

$$c_{ijkl}e_{kl} = c_{ijkl}e_{lk} = c_{ijlk}e_{kl} = c_{ijlk}e_{lk} \ \Rightarrow\ 0 = c_{ijkl}e_{kl} - c_{ijlk}e_{kl} = (c_{ijkl} - c_{ijlk})e_{kl}$$

となっているので、$c_{ijkl} = c_{ijlk}$ という対称性を持ちます。応力テンソルが対称 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ であるなら同じように

$$c_{ijkl} = c_{jikl}$$

として、前 2 つの添え字に対して対称になります。c_{ijkl} は $3^4 = 81$ 個 (3 次元なので添え字は 1 から 3 で、それが 4 個あるから) の成分を持ちますが、これらの対称性によって独立成分の数は減ります。3×3 対称行列の独立な成

分の数は 6 個 (対角成分 3 個と非対角成分の半分 3 個で 6 個) になっていることから、$c_{ijkl}=c_{jikl}$ による前 2 つの添え字からの独立成分は 6 個、同様に $c_{ijkl}=c_{ijlk}$ による独立成分は 6 個なので、このときの弾性係数テンソルの独立成分は $6\times 6=36$ 個です。具体的に見れば、前 2 つの添え字では独立成分は

$$c_{11kl}\ ,\ c_{22kl}\ ,\ c_{33kl}\ ,\ c_{12kl}\ ,\ c_{13kl}\ ,\ c_{32kl}$$

これらから

$$(c_{1111}\ ,\ c_{1122}\ ,\ c_{1133}\ ,\ c_{1112}\ ,\ c_{1113}\ ,\ c_{1132})\ ,\ (c_{2211}\ ,\ c_{2222}\ ,\ldots)\ ,\ldots$$

となっているので、$6\times 6=36$ 個になります。

等方的の条件を加えると、等方的な階テンソルの一般形が係数を a_1,a_2,a_3 として

$$a_1\delta_{ij}\delta_{kl}+a_2\delta_{ik}\delta_{jl}+a_3\delta_{il}\delta_{jk}$$

と書けることから

$$\sigma_{ij}=c_{ijkl}e_{kl}=(a_1\delta_{ij}\delta_{kl}+a_2\delta_{ik}\delta_{jl}+a_3\delta_{il}\delta_{jk})e_{kl}=a_1e_{kk}\delta_{ij}+(a_2+a_3)e_{ij}$$

係数を書き変えて

$$\sigma_{ij}=\lambda e_{kk}\delta_{ij}+2\mu e_{ij}\qquad (e_{kk}=e_{11}+e_{22}+e_{33})$$

このときの λ,μ はラメの弾性定数（Lamé's elastic constant）と呼ばれ、物体ごとに決まる量です。

線形弾性体の変形の方程式を作るために、応力テンソルを変位 u_i による運動量方程式に入れます。体積力はないとします。変位は時間 t_0 と t での物質粒子の位置の差です。微小ひずみテンソルを使う今の近似では偏微分において空間表示と物質表示での位置ベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{X}$ の区別がないので、物質微分は時間の偏微分と同じになり、運動量方程式は

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_i&=\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}\\&=\lambda\frac{\partial e_{kk}}{\partial x_j}\delta_{ij}+2\mu\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j}\end{aligned}$$

変位の位置変化が微小なら大きな変形はしないので、密度 ρ は一定とします。変形していけば

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_i&=\frac{1}{2}\lambda\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_k})+\mu\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i})\\&=\lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+\mu\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i})\\&=\lambda\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_k}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+\mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j\partial x_i}\\&=\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_k}\qquad (2)\end{aligned}$$

となり、これが線形弾性体の変位を求める式になります。ベクトル表記にすれば

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{u}=\mu\nabla^2\boldsymbol{u}+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})$$

また、右辺第 1 項にベクトルの関係

$$\nabla^2\boldsymbol{W}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{W})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{W})$$

を使えば

$$\mu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})-\mu\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u})+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})=-\mu\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u})+(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})$$

とできます。後は状況に合わせて方程式を解いていくことになります。

単純な状況になる例を見ておきます。応力テンソルが x_1 のみに依存しているなら (微小ひずみテンソルを通して x_1 に依存)

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_i=\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{i1}$$

さらに、変位が $u_1(x_1,t)$ だけが 0 でないなら (x_1 に依存して x_1 方向だけに変位が起きている)、微小ひずみテンソルは $e_{11}=\partial u_1/\partial x_1$ となるので

$$\sigma_{11}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\ ,\ \sigma_{22}=\sigma_{33}=\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

これらから

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_1=(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u_1$$

となり、1 次元波動方程式となります。x_1 方向の変位 u_1 のみが起きているので、縦ひずみ (longitudinal strain) と呼ばれます。

同じような状況は、応力テンソルは x_1 のみに依存し、σ_{11} のみが 0 でないとしても作れます。応力テンソルが σ_{11} のみになるのは x_1 方向のみに応力が作用しているときなので

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_1=\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{11}$$

この状況でも σ_{11} は簡単に分かります。$\sigma_{22}=\sigma_{33}=0$ なので

$$\sigma_{22}=\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})+2\mu e_{22}=0$$

$$\sigma_{33}=\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})+2\mu e_{33}=0$$

これらから $e_{22}=e_{33}$ が分かり、さらに変形すれば

$$\begin{aligned}\lambda(e_{11}+e_{33}+e_{33})+2\mu e_{33}&=0\\ 2(\lambda+\mu)e_{33}&=-\lambda e_{11}\\ e_{33}&=-\frac{\lambda e_{11}}{2(\lambda+\mu)}\\ &=-\nu e_{11}\end{aligned}$$

ν はポアソン比 (Poisson's ratio) と呼ばれます。ポアソン比は応力が作用している方向のひずみと $e_{22}=e_{33}$ のひずみとの比です。これらから、σ_{11} は

$$\begin{aligned}\sigma_{11}=\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})+2\mu e_{11}&=\lambda(e_{11}-\nu e_{11}-\nu e_{11})+2\mu e_{11}\\ &=(\lambda-2\lambda\nu+2\mu)e_{11}\\ &=(\lambda-2\lambda\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}+2\mu)e_{11}\\ &=(\frac{\lambda^2+\lambda\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\lambda^2}{\lambda+\mu}+2\frac{\lambda\mu+\mu^2}{\lambda+\mu})e_{11}\\ &=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}e_{11}\\ &=Ee_{11}\end{aligned}$$

となり、E はヤング率 (Young's modulus) と呼ばれます。ヤング率は作用している応力とひずみの比です。ポアソン比やヤング率は実験から求める量です。というわけで、変位の式は

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_1&=E\frac{\partial}{\partial x_1}e_{11}\\ &=E\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u_1\end{aligned}$$

となります。

2 次元波動方程式にも簡単にできます。このときは応力テンソルが x_3 に依存していないとします。x_3 の偏微分が 0 になるので

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_i=\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{i1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{i2}$$

ここで、変位は $u_3(x_1,x_2,t)$ のみが 0 でないとすれば、e_{31},e_{32} のみが 0 でないので

$$\sigma_{31}=2\mu e_{31}=\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\ ,\ \sigma_{32}=\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

よって

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_3 &= \frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{31}+\frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{32} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u_3+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u_3
\end{aligned}
$$

となり、$u_3(x_1,x_2,t)$ による 2 次元波動方程式となります。このときの変位は x_1x_2 平面に対して垂直な $u_3(x_1,x_2,t)$ のみになっています。このように、面に対して垂直な変位のみのときは面外せん断 (antiplane shear) 運動と呼ばれます。

x_1x_2 平面に水平になるようにもできます。このときは、$u_a(x_1,x_2,t)$ $(a=1,2)$ が 0 でなく、u_3 は 0 とすれば、応力テンソルは

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{ab} = \lambda e_{aa}\delta_{ab}+2\mu e_{ab} = \lambda\frac{\partial u_c}{\partial x_c}\delta_{ab}+\mu(\frac{\partial u_a}{\partial x_b}+\frac{\partial u_b}{\partial x_a}) \\
&\sigma_{33} = \lambda e_{aa} = \lambda\frac{\partial u_a}{\partial x_a}
\end{aligned}
$$

添え字 a,b,c は 1 から 2 としています。これらから

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_a &= \frac{\partial}{\partial x_b}\sigma_{ab} \\
&= \lambda\frac{\partial}{\partial x_b}\frac{\partial u_c}{\partial x_c}\delta_{ab}+\mu(\frac{\partial}{\partial x_b}\frac{\partial u_a}{\partial x_b}+\frac{\partial}{\partial x_b}\frac{\partial u_b}{\partial x_a}) \\
&= \lambda\frac{\partial^2 u_c}{\partial x_a\partial x_c}+\mu\frac{\partial^2 u_a}{\partial x_b^2}+\mu\frac{\partial^2 u_b}{\partial x_a\partial x_b} \\
&= \mu\frac{\partial^2 u_a}{\partial x_b^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_b}{\partial x_a\partial x_b}
\end{aligned}
$$

このときは面に水平な u_1,u_2 が 0 でなくなります。これは inplane motion と呼ばれます。

(2) に制限を与えて波動方程式にしましたが、(2) そのものを変形することでも波動方程式が出てきます。これを見ていきます。

(2) に戻って、新しく

$$
s=\nabla\cdot\boldsymbol{u}\ ,\ \boldsymbol{w}=\nabla\times\boldsymbol{u}
$$

とすれば、(2) は

$$
\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{u}=-\mu\nabla\times\boldsymbol{w}+(\lambda+2\mu)\nabla s
$$

これは $s,\boldsymbol{w}$ による式に変えられます。右辺第 1 項は発散を取ると (ρ は定数)、ベクトルの計算から

$$
\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{w})=0
$$

となるので

$$\begin{aligned}\rho\nabla\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{u} &= -\mu\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{w})+(\lambda+2\mu)\nabla\cdot\nabla s\\ \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}s &= (\lambda+2\mu)\nabla^2 s\end{aligned}$$

となって、s による波動方程式になります。

今度は回転を取ってみると

$$\begin{aligned}\rho\nabla\times\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{u} &= -\mu\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{w})+(\lambda+2\mu)\nabla\times\nabla s\\ \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{w} &= -\mu(\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{w})-\nabla^2\boldsymbol{w})\\ &= \mu\nabla^2\boldsymbol{w}\quad(\nabla\cdot\boldsymbol{w}=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{u})=0)\end{aligned}$$

となって、$\boldsymbol{w}$ による波動方程式となります。というわけで、$\boldsymbol{u}$ に対する 1 つの式が $s,\boldsymbol{w}$ に対する波動方程式に変更されます。

波動方程式になりましたが、$\boldsymbol{u}$ を求めるには $s,\boldsymbol{w}$ を積分する必要があります。積分より微分の方が簡単なので微分から求められるように、ϕ から

$$s=\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\nabla^2 P$$

として、$\boldsymbol{u}=\nabla P$ となる P を作ります。この P の式は

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2 P &= (\lambda+2\mu)\nabla^2\nabla^2 P\\ \nabla^2(\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}P) &= \nabla^2((\lambda+2\mu)\nabla^2 P)\\ \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}P &= (\lambda+2\mu)\nabla^2 P \qquad (3)\end{aligned}$$

となっていて、波動方程式の形のままです。なので、波動方程式を解いてそれを微分すれば $\boldsymbol{u}$ が求められます。これを線形弾性体の話では P 波の波動方程式とも言います。

$\boldsymbol{w}$ では

$$\boldsymbol{w}=\nabla\times\boldsymbol{u}=\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{S}$$

として、$\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{S}$ とします。これを入れると

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{w} &= \mu\nabla^2\boldsymbol{w}\\ \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{S} &= \mu\nabla^2(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{S})\\ \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{S})-\nabla^2\boldsymbol{S}) &= \mu\nabla^2(\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{S})-\nabla^2\boldsymbol{S})\end{aligned}$$

ここで、$\nabla\cdot\boldsymbol{S}=0$ と要求すれば

$$
\begin{aligned}
-\nabla^2(\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{S}) = & -\nabla^2(\mu\nabla^2\boldsymbol{S}) \\
\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{S} = & \ \mu\nabla^2\boldsymbol{S}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

となって、波動方程式になります。これを S 波の波動方程式とも言います。

$\nabla\cdot\boldsymbol{S}=0$ は波動方程式にするために意味もなく与えたものでなく式の構造から出てくるものです。このことをはっきりさせるために、今の式変形の結果を見直します。1 つの方程式 (2) から 2 つの方程式 (3),(4) への分解は $\boldsymbol{u}$ を

$$
\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2
$$

として、$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ の方程式にしたことです。今の定義では

$$
\boldsymbol{u}_1=\nabla P\ ,\ \boldsymbol{u}_2=\nabla\times\boldsymbol{S}
$$

によって、P と $\boldsymbol{S}$ の方程式になっています。しかし、時間にのみ依存する適当な関数 $f(t)$ と適当な関数 $g(\boldsymbol{x},t)$ を P と $\boldsymbol{S}$ に加えても

$$
\boldsymbol{u}_1=\nabla(P+f(t))=\nabla P
$$

$$
\boldsymbol{u}_2=\nabla\times(\boldsymbol{S}+\nabla g)=\nabla\times\boldsymbol{S}
$$

となって（ベクトル計算から $\nabla\times\nabla g$ は 0)、$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ に影響しません。このため、$P,\boldsymbol{S}$ に $f(t),\chi(\boldsymbol{x},t)$ の任意性が残っています。これは電磁気でのマクスウェル方程式のゲージ変換と同じ構造です。なので、クーロンゲージと同じように $\nabla\cdot\boldsymbol{S}=0$ を条件として加えることで任意性を消しています。このように、(4) で $\nabla\cdot\boldsymbol{S}=0$ を要求したのは式の構造上の性質からです。また、このため連続体の力学でも P はスカラーポテンシャル、$\boldsymbol{S}$ はベクトルポテンシャルと言われたりします。

式変形とゲージ変換の視点から $\boldsymbol{u}=\nabla P+\nabla\times\boldsymbol{S}$ $(\nabla\cdot\boldsymbol{S}=0)$ と書けることを見ましたが、これはベクトルは発散と回転に分解できるというヘルムホルツの定理そのものです (下の補足参照)。

P 波、S 波は地震の話で出てくる単語です。$P,\boldsymbol{S}$ の式は波動方程式なので、$P,\boldsymbol{S}$ が波として伝わる速度は

$$
v_p=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\ ,\ v_s=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\ ,\ \frac{v_p}{v_s}=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\mu}}=\sqrt{1+\frac{1}{1-2\nu}}
$$

となっていて、現実の物質では λ,μ は正であるために (例えばアルミニウムならポアソン比で $\nu\simeq 0.34$)、P のほうが速く伝播していきます。P 波のほうが先に伝わるので、P 波が第一波 (primary wave)、S 波が第二波 (secondary wave) となっています。

また、$P,\boldsymbol{S}$ の波動方程式から変位は縦波 (波の進行方向に変化)、横波 (波の進行方向に対して垂直に変化) として伝わることが分かります。波動方程式の解の形として

$$
P=F(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-ct)=F(\xi)
$$

を使います。$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトルで波の進行方向を向いています (波面に垂直な方向)。$\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}=\nabla P$ になっているとします。このときの変位 $\boldsymbol{u}$ の方向を見ると

$$u_i=\frac{\partial P}{\partial x_i}=\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\frac{dF(\xi)}{d\xi}=k_i\frac{dF(\xi)}{d\xi}\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{k}\frac{dP}{d\xi}$$

このため、$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{k}$ は同じ方向を向いており、$\boldsymbol{k}$ は波の進行方向 (P が伝わっていく方向) なので、$\boldsymbol{u}$ も進行方向を向いています。よって、$\boldsymbol{u}$ は縦波として伝播していきます。

同様に

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-ct)=\boldsymbol{G}(\xi)$$

として、$\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{S}$ とすれば

$$u_i=\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}S_k=\epsilon_{ijk}k_j\frac{dG_k(\xi)}{d\xi}\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{k}\times\frac{d\boldsymbol{S}}{d\xi}$$

$\boldsymbol{k}$ とのベクトル積の形になっているので $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{k}$ に垂直です。よって、横波です。これが地震では先に縦揺れ (P 波) が来てその後に横揺れ (S 波) がくるという話に対応します。ただし、揺れ方 (変位) は地面に対する波の進行方向によるので、進行方向によって揺れ方は異なります。

・補足

ヘルムホルツの定理を大雑把に示します。ヘルムホルツの定理は、ベクトルは

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{V}=-\nabla\phi+\nabla\times\boldsymbol{A}\\
&\nabla\phi=s\ ,\ \nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{c}\\
&\phi(\boldsymbol{r}_1)=\frac{1}{4\pi}\int d^3r_2\frac{s(\boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}\ ,\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_1)=\frac{1}{4\pi}\int d^3r_2\frac{\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}
\end{aligned}$$

として、発散と回転の和に分解できるというものです。3 次元積分の範囲は無限大の範囲です ($|\boldsymbol{r}_2|$ の範囲が $0\sim\infty$)。無限大の範囲なので、積分を収束させるためには $s,\boldsymbol{c}$ は無限大で十分早く 0 に近づく関数の必要があります。

まず、積分の中にいる $s,\boldsymbol{c}$ を微分で取り出せることを示します。$\boldsymbol{r}_1$ でのナブラを ∇_1 として、電磁気学の「静電場」の補足で示しているように

$$\nabla_1^2\phi(\boldsymbol{r}_1)=\frac{1}{4\pi}\int d^3r_2\ s(\boldsymbol{r}_2)\nabla_1^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}=-\frac{1}{4\pi}\int d^3r_2\ s(\boldsymbol{r}_2)4\pi\delta^3(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)=-s(\boldsymbol{r}_1)$$

$\delta^3(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)$ は 3 次元でのデルタ関数です。$\boldsymbol{A}$ でも同様に

$$\nabla_1^2\boldsymbol{A}=\frac{1}{4\pi}\int d^3r_2\ \boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}_2)\nabla_1^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}=-\frac{1}{4\pi}\int d^3r_2\ \boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}_2)4\pi\delta^3(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)=-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}_1)$$

となっています。

一方で、$\boldsymbol{V}$ の発散と回転は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=-\nabla\cdot(\nabla\phi)+\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=-\nabla^2\phi=s$$

$$\nabla\times\boldsymbol{V}=-\nabla\times(\nabla\phi(\boldsymbol{r}))+\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+\boldsymbol{c}$$

回転での第 1 項に $\boldsymbol{A}$ の積分形を入れてみると

$$\nabla_1(\nabla_1\cdot\boldsymbol{A})=\frac{1}{4\pi}\nabla_1\int d^3r_2\ \boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}_2)\cdot\nabla_1\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}=-\frac{1}{4\pi}\nabla_1\int d^3r_2\ \boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}_2)\cdot\nabla_2\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}$$

$\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ の $\boldsymbol{r}_1$ 微分を $\boldsymbol{r}_2$ 微分にしているので符号を反転させています。積分は部分積分によって

$$\int d^3r_2\ \boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}_2)\cdot\nabla_2\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}=\int d^3r_2\ \nabla_2\cdot(\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}_2)\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|})-\int d^3r_2(\nabla_2\cdot\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}_2))\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}$$

第 1 項はガウスの発散定理から無限遠での面積分になりますが、$\boldsymbol{c}$ は無限遠で十分早く 0 になるとしているので消えます。そうすると

$$\nabla_1\times\boldsymbol{V}=\frac{1}{4\pi}\nabla_1\int d^3r_2(\nabla_2\cdot\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}_2))\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}+\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}_1)$$

このとき、$\nabla\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{c}$ なら第 1 項は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r})=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{V})=0$$

となり、$\nabla\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{c}$ が成立します。よって、ベクトルは発散と回転の和として

$$\boldsymbol{V}=-\nabla\phi+\nabla\times\boldsymbol{A}$$

と書けます。

ヘルムホルツの定理には一意性もありますが省きます。一意性の証明として物理で出てくるのは $\boldsymbol{V}$ が無限遠で 0 という条件の場合が多く、ここでの話にラプラス方程式の境界条件を合わせれば示せます。