

## 連続体

表記といくつかの単語の定義を与えていきます。

連続体の話でよく使われる表記と記号を簡単にまとめます。

- アインシュタインの和の規約  
添え字に対して和を取るとき

$$\sum_{i=1}^3 A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

と書きますが、 $\Sigma$ を省いて

$$A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

と書くことにします。これはアインシュタインの和の規約と呼ばれ、同じ添え字があるとき和を取るといっただけです。行列  $M_{ij}$  に対しても

$$\sum_{j=1}^3 M_{ij} A_j = M_{ij} A_j = M_{i1} A_1 + M_{i2} A_2 + M_{i3} A_3$$

とします。

和を取る添え字の文字は任意なので

$$A_i B_i = A_j B_j \quad \left( \sum_{i=1}^3 A_i B_i = \sum_{j=1}^3 A_j B_j \right)$$

としてもいいことから

$$M_{ij} A_i B_j = M_{ji} A_j B_i \quad \left( \sum_{i,j=1}^3 A_i M_{ij} B_j = \sum_{i,j=1}^3 A_j M_{ji} B_i \right)$$

といった添え字の書き換えがよく行われます。

以降はアインシュタインの規約を使います。

- クロネッカーデルタ  
クロネッカーデルタ  $\delta_{ij}$  は

$$\delta_{ij} = 1 \quad (i = j), \quad \delta_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

と定義され、行列で言えば単位行列  $I$  に対応します。これによって、微分が

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial x_2}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial x_3}{\partial x_3} = 1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = 0, \dots$$

のようになっているなら

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

と書けます。

- レヴィ・チビタ記号  
レヴィ・チビタ記号  $\epsilon_{ijk}$  は

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = +1, \quad \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1 \quad (\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji})$$

と定義され、他の添え字の組み合わせは 0 です ( $\epsilon_{112} = \epsilon_{212} = \dots = 0$ )。例えば、レヴィ・チビタ記号を使うとベクトル積は

$$(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})_i = \epsilon_{ijk} X_j Y_k$$

と書けます (和の規約を使用)。

- ベクトル  
基本的に 3 次元デカルト座標を使っていきます。デカルト座標の基底を  $e_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) とすれば任意のベクトルは

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$$

と書けます。  $a_1, a_2, a_3$  がベクトル成分です。大きさが 1 に規格化 (正規化) されている直交基底の内積は

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$$

なので、規格化されている直交基底 (正規直交基底) はクロネッカーデルタによって  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$  となります。この  $i, j$  は基底の区別であって、ベクトルの成分ではないことに注意してください。基底と言ったときは基本的に規格化されているとします。ベクトル積は右手系を取っているなら

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$$

となり、レヴィ・チビタ記号を使えば  $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$  と書けます。

デカルト座標での基底は位置に依存しないので (時間にも依存しない)、位置の微分に引っかかりません (例えば、極座標に変換すれば基底は位置に依存する)。

ベクトル  $\mathbf{a}(t)$  の微分は

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \quad v_i = \frac{da_i}{dt} \quad (\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d}{dt}(a_i \mathbf{e}_i) = \frac{da_i}{dt} \mathbf{e}_i = v_i \mathbf{e}_i)$$

ナブラ  $\nabla$  は関数  $F(\mathbf{x})$  に対して

$$\nabla F = \mathbf{e}_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

$$\mathbf{a} \cdot \nabla F(\mathbf{x}) = a_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} F(\mathbf{x}) = \delta_{ij} a_i \frac{\partial}{\partial x_j} F(\mathbf{x}) = a_i \frac{\partial}{\partial x_i} F(\mathbf{x})$$

連続体の力学で出てくる基本的な単語をまとめます。

- 連続体

力学は質点の運動を扱っており、基本的には物体の形を考慮に入れていません。しかし、現実の物体は形を持ち、その形は力が加われば変わります。形を持ち、形を変える物体を力学の延長として扱うのが連続体の力学です。なので、扱う対象は固体、液体、気体です。特に、液体と気体は流体と呼ばれ、それは流体力学として連続体の力学の主要な分野として扱われています。

物体は無数の粒子 (原子、分子) が集まって出来ています。力学の感覚で言えば、無数の質点がお互いに力を及ぼしあいながら運動している状況です。なので、無数の運動方程式の連立方程式を解くという現実的でない問題になってしまいます。この状況を簡易化するのが連続体 (continuum) の概念です。

まず、連続体の力学で知りたいのは物体の巨視的な性質です。なので、物体を構成する粒子それぞれの振る舞いではなく、構成する粒子が集団としてどのような振る舞いをするのかが知りたいです。このため、物体を微小な領域 (粒子を多数含んでいる微小な領域) に分割し、その各微小領域は同じ性質を持っているとし、その微小領域を質点として扱うようにします (ある点  $P$  の微小領域として質点扱いにする)。これが可能な物体を連続体と言っています。

紛らわしいですが、連続体の力学で粒子と言っているときは大抵の場合でこの微小領域のことです。区別するために微小領域は物質粒子 (material particle) や物質点 (物体点、material point) と呼ばれます。なので、物質粒子は微視的、巨視的な影響は無視できる程度の大きさを持ち、質量が一定になっている対象のことです (構成している粒子を考慮しないで済む粒子の集まり)。ここでは粒子と言っているときは物体を構成している粒子等を指すことにして、物質粒子の意味では使いません。

また、物質粒子は連続的に分布していて、他の物質粒子と区別可能としますが、近い位置にいる物質粒子は同じような運動をしているとされます (連続分布しているのでいきなり周りと違う動きをしない)。

連続体の定義をもう少し見ていきます。密度の定義は質量を体積で割ったものなので、質量を  $m$ 、体積を  $V$  とすれば密度  $\rho$  は  $\rho = m/V$  と与えられます。これを物体中のある点  $Q$  での密度を表すようにします。つまり、密度を連続な関数  $\rho(\mathbf{x}, t)$  として与えるようにします ( $\mathbf{x}$  は位置ベクトル、 $t$  は時間)。そのために、点  $Q$  を含むように物体の一部分を抜き出します。この抜き出した領域  $D$  の体積を  $\delta V$ 、この領域の質量を  $\delta M$  とします。そうすると、この物体の一部分の密度 (平均的な密度) は

$$\rho = \frac{\delta M}{\delta V}$$

となり、これは領域が微小であれば近似的に  $\rho(\mathbf{x}, t)$  と見なせます。この近似をよくするためには領域を小さくして点  $Q$  に近づければいいです。

ここで、他の尺度として長さ  $L$  の物体  $B$  を導入し、これは領域  $D$  より大きいとします (物体は3次元ですが、話は同じなので1次元の長さだけで特徴づけてしまいます)。領域  $D$  の長さを  $\delta l$  として、 $\delta l$  が  $L$  程度の大きさがあるなら、領域  $D$  の物体は物体  $B$  による影響を受けるはずなので、密度  $\rho(\mathbf{x}, t)$  は物体  $B$  に依存します (巨視的な影響)。ここから、物体  $B$  の影響を受けない程度まで  $\delta l$  を小さくしていき、物体を構成する粒子 (原子、分子) 程度の長さまでしたとします。そうすると、密度  $\rho(\mathbf{x}, t)$  は今度は粒子の影響を受け出

します (微視的な影響)。これが言いたいことは、領域  $D$  の大きさによって、密度  $\rho(x, t)$  が変わるということとです ( $\rho(x, t)$  は  $\delta l$  に依存している)。加えて、領域  $D$  をどのような形に取るかでも  $\rho(x, t)$  は変わります。

これをどうにかするために、 $\delta l$  は  $L$  より十分小さいが、物体を構成する粒子の影響を受けない程度の大きさの範囲に制限します。粒子の影響を受けないというのは、粒子同士の衝突がないと言い換えることにすれば、平均自由行程 (粒子が他の粒子と衝突しない平均距離)  $\lambda$  より大きければいいと考えられます。つまり、 $\delta l$  は

$$\lambda \ll \delta l \ll L$$

であるとします。このように制限された  $\delta l$  なら、微視的、巨視的両方からの影響が極端に作用することはないとして、密度  $\rho(x, t)$  は  $\delta l$  に対してほぼ一定値を取ると考えます。つまり、 $\delta l$  が  $a$  から  $b$  ( $\lambda \ll a, b \ll L$ ) の値を持つとき、 $\rho(x, t)$  は  $\delta l$  に対して一定とします。このように領域  $D$  の大きさに下限と上限を与えることで近似は意味を持てます。

点  $Q$  を含む体積  $\delta V$  の領域  $D$  における近似的な密度を作りましたが、これを点  $Q$  の密度とするには  $\delta V \rightarrow 0$  の極限を取ることになります。つまり、点  $Q$  での密度の連続関数  $\rho(x, t)$  は

$$\rho(x, t) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta M}{\delta V} \quad (1)$$

と定義されます。このとき、この極限が存在するののかという問題が出てきます。例えば、 $\delta V$  を粒子程度の大きさにすると粒子の大きさが無視できなくなるために、 $\rho(x, t)$  が連続な関数ではなくなります。なので、 $\delta V \rightarrow 0$  の極限が存在するのかははっきりしません。しかし、この極限は取れると仮定します。さらに、 $\rho(x, t)$  は  $\delta l$  が  $a$  から  $b$  のとき一定としましたが、この  $a$  を  $0$  まで取れると仮定します (continuum hypothesis)。この仮定のもとで平均密度 (1) を与えるのが連続体で、対象を連続体として扱うことを連続体近似と言います。連続体の力学での物体はこの連続体として扱われます。

連続体 (特に流体に対して) であるかのどうかの判断にはクヌーセン数 (Knudsen number)  $K_n$  が使われます。クヌーセン数は

$$K_n = \frac{\lambda}{L}$$

と定義され、今の話から分かるように  $K_n \ll 1$  なら連続体として扱えます。

- 配置

空間における物体は物質粒子の集まりとして扱われます。物質粒子は空間上の位置ベクトルで指定され、物質粒子の位置ベクトルの集まりを配置 (configuration) と呼びます。基準配置 (reference configuration) は基準として選ばれたある時間での配置です。

- 物質表示と空間表示

知りたいのは物体がどのように変形するかです。変形 (deformation) は物体を構成する各部分の位置が変わること (配置が変わること) なので、物質粒子 (微小領域) の位置の変化として変形は表現されます。

位置が変化するので、ある時間  $t_0$  で点  $P_0$  にいる物質粒子が別の時間  $t > t_0$  では点  $P$  にいるとします。適当な直交座標系によるベクトルで  $P_0$  の位置は  $X$ 、 $P$  は  $x$  で表されるとします。 $X$  は物質座標 (material coordinates)、 $x$  は空間座標 (spatial coordinates) と呼ばれます。

物体の変形が連続的に起きるとすれば、物質粒子の位置は連続的に変化していきます。なので、 $t_0$  での位置  $X$  から  $t$  での位置  $x$  への変換を表す連続関数によるベクトル  $f$  が存在するとして

$$x = f(X, t), f(X, t_0) = X$$

物体中の複数の点と同じ点に移動することはないとし、この変換は1対1(写像で言えば全単射)で決まるとします。時間  $t_0$  から変化していることをはっきりさせるなら  $f(X, t: t_0)$  とでも書くと分かりやすいです。

同じように、物体に関わる何かしらの物理量  $\Phi$  も  $X, t$  に依存しているはずなので、 $\Phi(X, t)$  と与えます。このように、基準とする位置  $X$  に依存するように量を記述する方法を物質表示 (material description) やラグランジュの方法 (Lagrangian description) と言います。

物質表示に対して、 $x$  を変数として記述する方法を空間表示 (spatial description) やオイラーの方法 (Euler description) と言います。なので、空間表示では連続関数によるベクトル  $g$  によって

$$X = g(x, t)$$

として、 $x$  から  $X$  を与えます。このときの物理量  $\phi$  は  $\phi(x, t)$  となりますが、同じ物理量であるならどちらの方法でも同じ値になっていないといけませんので、 $\Phi(X, t) = \phi(x, t)$  が要求されます。変数をはっきり書くなら

$$\Phi(X, t) = \phi(f(X, t), t), \phi(x, t) = \Phi(g(x, t), t)$$

となっています。

$\phi(x, t)$  は電場  $E(x, t)$ 、磁場  $B(x, t)$  と同じように位置と時間を変数に持つ関数です。このような位置と時間を変数にする関数は場 (field) と呼ばれます。このため、例えば速度  $v(x, t)$  を速度場 (velocity field) と言ったりします。場を使う理論は場の理論と呼ばれ、連続体の力学は場の理論に分類されます。

ここでは  $f, g$  としましたが、大抵の場合では

$$x = x(X, t), X = X(x, t)$$

と表記されます。

- 物質微分

3次元ユークリッド空間での標準基底  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$  を使っているとします。連続体の力学では物質座標  $X$  と空間座標  $x$  の2つが出てくるので微分に注意が必要です。

物質座標  $X$  は時間  $t_0$  で固定された位置であるので、物質表示での  $\Phi(X, t)$  の時間微分は  $X$  が固定されているために偏微分の意味になり

$$\frac{d\Phi(X, t)}{dt} = \left(\frac{\partial\Phi(X, t)}{\partial t}\right)_X$$

$X$  を固定することをはっきりさせるために  $( )_X$  と書いていますが、 $|_X$  と書かれることも多いです。これはただの偏微分ですが、連続体の力学では物質微分 (material derivative) と呼ばれ

$$\frac{D\Phi(X, t)}{Dt} = \left(\frac{\partial\Phi(X, t)}{\partial t}\right)_X$$

と表記されます。物理量が位置  $x = f(X, t)$  なら、その時間微分は物質点の時間  $t$ 、位置  $x$  での速度になり

$$V(\mathbf{X}, t) = \left( \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}} = \frac{Df(\mathbf{X}, t)}{Dt}$$

もう1回微分すれば加速度になり

$$A(\mathbf{X}, t) = \left( \frac{\partial^2 f(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \right)_{\mathbf{X}} = \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}} = \frac{DV}{Dt}$$

式から分かるように速度と加速度はただの時間の偏微分として求まります。

一方で、 $\phi(\mathbf{x}, t)$  の時間微分は  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  が  $t$  に依存しているの、 $t$  の微分は偏微分の規則によって

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(\mathbf{x}, t)}{dt} &= \frac{d\phi(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t)}{dt} = \frac{\partial\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial x_1}{\partial t} \frac{\partial\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial t} \frac{\partial\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial t} \frac{\partial\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_3} \\ &= \frac{\partial\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t} \cdot \nabla\phi \end{aligned}$$

第1項の偏微分が  $\mathbf{x}$  を固定した場合であることを強調するときは

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \left( \frac{\partial\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}}$$

と書かれます。今は  $\phi(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{X}, t)$  なので

$$\left( \frac{\partial\Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}} = \frac{d\phi(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t} \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}, t)$$

$\mathbf{x} = f(\mathbf{X}, t)$  での  $\mathbf{X}$  が固定されているという意味で第2項の  $\mathbf{x}$  部分も偏微分になっています。この式から分かるように、物質微分は  $\mathbf{X}$  を固定した  $\phi(\mathbf{x}, t)$  の時間の偏微分と言えます ( $\partial\phi/\partial t$  は  $\mathbf{x}$  を固定した偏微分)。物質表示では偏微分、空間表示では微分になっているものが等しいことに注意してください。

空間表示での物理量の変数は  $\mathbf{x}, t$  なので、物質粒子の速度は  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  となっていて、その位置  $\mathbf{x}$  の時間微分です。なので

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$$

速度を使えば時間微分は

$$\frac{d\phi(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi$$

物質微分と言ったときはこの右辺の形を指すことが多く

$$\frac{D\phi(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \phi(\mathbf{x}, t)$$

と表記されます。これを使えば、加速度は

$$a(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$$

となります ( $\phi(\mathbf{x}, t)$  を  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  にしただけ)。

物質表示と空間表示での単純な例を示しておきます。1次元として、物質表示において速度は一定で、物質粒子の初期位置  $X$  の定数倍によって速度は  $v(X) = \alpha X$  と与えます。これを空間表示に書き換えます。物質表示では速度は物質微分によって

$$v(X) = \frac{D}{Dt} x(X, t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} x(X, t) \right)_X = \alpha X$$

なので、位置  $x(X, t)$  は、初期条件  $t = 0$  で  $x = X$  から

$$x(X, t) = \alpha X t + X$$

と求められます。速度  $v$  を空間表示にするには、これを使って  $X$  を  $x$  に書き直せばいいです (逆変換  $X = X(x, t)$  を求める)。よって

$$x = (\alpha t + 1)X$$

$$X = \frac{x}{\alpha t + 1}$$

を速度  $v(X)$  に入れて

$$v(X) = \alpha X = \frac{\alpha x}{\alpha t + 1} = v(x, t)$$

となります。

- 体積力、面積力

連続体の力学を扱うときの力は2種類に分類され、体積力 (body force) と面積力 (surface force) と呼ばれます。

体積力は体積 (質量) に比例する力で、距離が離れていても作用する力です。例えば、重力は体積力です。

面積力は面に作用し面積に比例する力で、物体を構成する原子や分子の相互作用によって起こる力とされます。なので、物体があれば勝手に生じる力です。また、物体を構成する粒子による力なので遠距離まで届かない力として扱われます。例えば、逆方向に動く2つの気体が接しているとき、2つの気体の境界面では摩擦が生じることになり (各気体を構成する粒子が境界面で衝突して減速する)、それによる力は面積力に分類されます。

体積力を考えるとき、単位質量あたりの体積力を扱うと便利です。物体中の適当な領域を考え、これに作用している体積力を  $F_V$ 、領域の体積を  $\delta V$ 、密度を  $\rho$  によって

$$F_V = f(\mathbf{x}, t) \rho \delta V$$

として、単位質量あたりの体積力  $f(\mathbf{x}, t)$  を定義します。より細かくは、領域内の点への極限を取るために、領域の体積  $\delta V$  の0の極限によって

$$f(x, t) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{F_V}{\rho \delta V} = \lim_{\delta M \rightarrow 0} \frac{F_V}{\delta M}$$

と定義されます。 $\delta M$  は領域の質量です。

- 応力

面積力の単位面積あたりの力を応力 (stress) と言い、応力は任意の面に作用する力なので方向を持つことからベクトルで表現されます。そのベクトルを応力ベクトル (stress vector) と呼びます。ただし、応力を traction、そのベクトルを traction vector としている場合もあります。これは、応力 (stress) という単語を応力テンソルだけに使いたいからです。この区別のために、stress vector とせずに traction vector が使われます。他にも、stress vector は仮想的な面、traction vector は実際の面の場合に対して使うとされていることもあります。ここではこのような区別は無視して応力だけ使っていきます。

適当な面  $S$  を考え、この面上での点  $Q$  を含む微小領域に面積力  $\Delta F_S$  が作用しているとします。応力は面積力を面積で割ったものなので、微小な領域の面積を  $\Delta S$  とすれば、この面での平均的な応力ベクトル  $\tau_s$  は

$$\tau_s = \frac{\Delta F_S}{\Delta S}$$

そして、これを点  $Q$  での応力とするには  $\Delta S \rightarrow 0$  にすればいいので

$$\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_S}{\Delta S}$$

連続体の考え方に従って、この極限は有限になると仮定します ( $\Delta S$  が変われば  $\Delta F_S$  も変化するために、どうやって  $\Delta S$  を小さくしたかで極限が変わる可能性があるが、1 つに決まるとする)。

これだけだと、面に対して  $\tau$  はどちらの方向を向いているのかを定義していません。なので、面  $S$  の単位法線ベクトル  $n$  の向いている方を面の表側 ( $n$  の向いている側)、逆を面の裏側 ( $-n$  の向いている側) と定義します。これによって、 $\tau$  は面の表側から裏側に作用する力とします (面の表側の物体が裏側の物体に作用する力)。

言葉の言い回しによるものですが、応力は面の表側から裏側に作用する力としますが、表側から裏側に向かう力とは言っていないことに注意してください。例えば、物体をある平面で区切って領域 I と領域 II に分けたとします。その平面を  $xy$  平面上に置き、領域 I が  $z$  軸の正、領域 II が  $z$  軸の負に在るとし、平面の法線ベクトルは  $z$  軸の正方向を向いているとします。このとき、領域 I (表側) が領域 II (裏側) を引っ張る力になっているなら、応力ベクトルの向きは  $z$  軸の正方向になります。

面  $S$  上の点  $Q$  での応力  $\tau$  は点  $Q$  での法線方向と接線方向に分解でき、それぞれを法線応力 (normal stress)、接線応力 (tangential stress) と言います (例えば、 $xy$  平面から出ているベクトルは  $z$  軸方向のベクトルと  $xy$  平面上のベクトルに分解できる)。接線応力はせん断応力 (shear stress) とも呼ばれます。

- コーシーの応力原理

ある面  $S$  上の点  $Q$  を含む微小領域  $\Delta S$  に面積力  $\Delta F_S$  が作用しているとき、点  $Q$  での応力ベクトルは

$$\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_S}{\Delta S} \tag{2}$$

と与えられると仮定されています。コーシーの応力原理 (Cauchy's stress principle) はこれをより強くしたもので、点  $Q$  で同じ単位法線ベクトルを持つ面  $S_1, S_2, \dots$  に対して、(2) は全て同じ応力ベクトルになるという仮定です (単位法線ベクトルが同じ面において (2) は等しくなるという仮定)。別の言い方をすれば、点

$Q$  を含む面  $S_1, S_2, \dots$  があり、その全ての面の点  $Q$  での接平面が同じなら、応力ベクトルは同じになるということです。簡単に言えば、コーシーの応力原理はある点での応力ベクトルは単位法線ベクトルに依存すると言っています。

力学での作用・反作用の法則が成立しており、点  $Q$  には  $\tau$  の反作用  $-\tau$  が  $-n$  方向の力として作用しているなら、法線ベクトルの依存性のために、 $\tau, -\tau$  の関係は

$$\tau(-n) = -\tau(n)$$

となります。