ハミルトン・ヤコビ方程式の変数分離

ハミルトン・ヤコビ方程式の解を求める方法として変数分離を使った例を見ていきます。
ポテンシャルのない場合と中心力の場合を求めています。

正準変換前の正準変数を q, p、変換後を Q, P とし、q, p, Q, P は $q = (q_1, q_2, \ldots q_n)$ として n 個の変数を持つと表記します。変換前のハミルトニアンは H、変換後は K とし、母関数 $S(q, P, t)$ によって

$$K(Q, P, t) = 0 \tag{1a}$$

$$K = H + \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial t} \tag{1b}$$

$$p_i = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q_i} \tag{1c}$$

$$Q_i = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial P_i} \tag{1d}$$

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial P_j} \neq 0 \tag{1e}$$

となるように変換することで、ハミルトン・ヤコビ方程式は

$$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

ハミルトン・ヤコビ方程式は 1 階偏微分方程式なので、一般解 (任意関数を含む解) を求めるのは大変です。しかし、一般解が必要になることはほぼなく、完全解 (complete solution, complete integral) と呼ばれるものが求まれば十分になっています。完全解は独立変数と同じ数の定数を含む解のことです。今の場合は、独立変数は q_i と t の $n+1$ 個です。

変換後の Q, P による正準方程式は

$$\frac{dQ_i}{dt} = 0 \ , \ \frac{dP_i}{dt} = 0$$

となっているので、これらは定数です。それらを α_i, β_i として、

$$P_i = \alpha_i \ , \ Q_i = \beta_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ も α と表記しています。$S(q, \alpha, t)$ は n 個の定数を含むので、後 1 個の定数を加えれば完全解になります。これは、S はハミルトン・ヤコビ方程式に微分の形でしか出てこないことから

$$S(q, \alpha, t) + \alpha_{n+1}$$

とすればいいだけです。しかし、座標と運動量は母関数の微分から求められるので、α_{n+1} は寄与しません。というわけで、α_{n+1} は無視して $S(q,\alpha,t)$ を完全解と呼んでしまいます。これと (1d) を合わせることで、もとの正準変数 $q_i = q_i(\beta,\alpha,t), p_i = p_i(\beta,\alpha,t)$ が求まります。

実際に、$S(q,\alpha,t)$ が正準方程式を満たすことを確かめておきます。(1d) を時間微分すると

$$\begin{aligned}
\beta_i &= \frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_i} \\
0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_i} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{dq_j}{dt}\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_i}
\end{aligned}$$

ハミルトン・ヤコビ方程式は α_i で微分すると

$$0 = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} H(q, p(q,\alpha,t),t) + \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i}\frac{\partial}{\partial p_j} H(q,p(q,\alpha,t),t) + \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\frac{\partial S}{\partial t}$$

これを使えば

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^{n} \frac{dq_j}{dt}\frac{\partial^2 S(q,\alpha,t)}{\partial q_j \partial \alpha_i} + \frac{\partial^2 S(q,\alpha,t)}{\partial t \partial \alpha_i} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{dq_j}{dt}\frac{\partial^2 S(q,\alpha,t)}{\partial q_j \partial \alpha_i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i}\frac{\partial}{\partial p_j} H(q,p(q,\alpha,t),t) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{dq_j}{dt}\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\frac{\partial S}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i}\left(\frac{dq_j}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\right)
\end{aligned}$$

S の微分は条件 (1e) から全て 0 になることはないので

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

となり、(1c) に対しても同様に行えば

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

として、正準方程式が出てきます。

ハミルトニアンが陽に時間依存していなければ、ハミルトン・ヤコビ方程式は

$$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}) = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

左辺に t がいないので、S は

$$S(q, \alpha, t) = G(q, \alpha) - E(\alpha)t \tag{2}$$

と書けます。E が q_i に依存すると $\partial S/\partial q$ に引っ掛かるので、α_i にだけ依存させています。G はハミルトンの特性関数 (characterstic function) と呼ばれます。これによって

$$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}) = E(\alpha)$$

となるので、E は力学的エネルギーです。

同じことは循環座標 (ハミルトニアンに現れない座標) がある場合でも言えます。q_n が循環座標なら、ハミルトン・ヤコビ・方程式は

$$H(q_1, \ldots, q_{n-1}, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t) = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

q_n が出てこないためには

$$S = S'(q_1, \ldots, q_{n-1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, t) + \alpha_n q_n \tag{3}$$

とすればいいです。これによってハミルトン・ヤコビ方程式は

$$H(q_1, \ldots, q_{n-1}, \frac{\partial S'}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial q_{n-1}}, \alpha_n, t) = -\frac{\partial S'}{\partial t}$$

となり、q_n が現れません。循環座標が増えても、$\alpha_l q_l + \cdots + \alpha_{n-1} q_{n-1}$ が加わるようになるだけです。

変数分離によって完全解を求める方法を見ていきます。まず、ポテンシャルのない自由粒子として、具体的に求めます。デカルト座標 $q_i = (x, y, z)$ としてハミルトニアンは

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \quad (p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i})$$

$\boldsymbol{p}$ は 3 次元運動量です。このときのハミルトン・ヤコビ方程式は

$$\frac{1}{2m}\big((\frac{\partial S}{\partial x})^2 + (\frac{\partial S}{\partial y})^2 + (\frac{\partial S}{\partial z})^2\big) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

x, y, z, t がそれぞれ別れているので、S の形を

$$S(x, y, z, \alpha, t) = X(x, \alpha) + Y(y, \alpha) + Z(z, \alpha) + T(t, \alpha) \tag{4}$$

として、変数が別れた形を仮定します。そうすると

$$\frac{1}{2m}\Big((\frac{\partial S}{\partial x})^2 + (\frac{\partial S}{\partial y})^2 + (\frac{\partial S}{\partial z})^2\Big) + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m}\Big((\frac{dX}{dx})^2 + (\frac{dY}{dy})^2 + (\frac{dZ}{dz})^2\Big) + \frac{dT}{dt}$$

変数が 1 つになるので常微分にしています。これから

$$\frac{1}{2m}\Big((\frac{dX}{dx})^2 + (\frac{dY}{dy})^2 + (\frac{dZ}{dz})^2\Big) + \frac{dT}{dt} = 0 \tag{5}$$

左辺の各項はそれぞれ x, y, z, t に依存しており、それらの和は 0 です。このため、各項はそれぞれが定数になる必要があり、定数 a_x, a_y, a_z によって

$$\frac{\partial X}{\partial x} = a_x \ \Rightarrow\ X = a_x x\ ,\ \frac{\partial Y}{\partial y} = a_y \ \Rightarrow\ Y = a_y y\ ,\ \frac{\partial Z}{\partial z} = a_z \ \Rightarrow\ Z = a_z z$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{2m}(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) \ \Rightarrow\ T = -\frac{1}{2m}(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)t$$

これらによって、定数を 3 個含む完全解として

$$S(x, y, z, a_x, a_y, a_z, t) = a_x x + a_y y + a_z z - \frac{1}{2m}(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)t$$
$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = a_x\ ,\ p_y = \frac{\partial S}{\partial y} = a_y\ ,\ p_z = \frac{\partial S}{\partial z} = a_z$$

ハミルトニアンが時間を含んでいないので、(2) の形になります。このように、変数を分離することで解が見つかります。また、3 個の定数 a_x, a_y, a_z は $P_i = \alpha_i$ なので、定数 $Q_i = \beta_i$ は

$$Q_x = \frac{\partial S}{\partial P_x}$$
$$\beta_x = \frac{\partial S}{\partial a_x}$$
$$= x - \frac{1}{m}a_x t$$
$$x = \frac{1}{m}a_x t + \beta_x$$

他も同様で、等速直線運動となります。

今の求め方を一般化します。時間を含まないとして、ハミルトニアン H が

$$
\begin{aligned}
&H(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n)=h_1(q_1,p_1)+\cdots+h_n(q_n,p_n)\\
&S(q,\alpha,t)=G(q,\alpha)-E(\alpha)t
\end{aligned}
$$

と分解できる形になっているとします。そうすると、ハミルトン・ヤコビ方程式は

$$
h_1(q_1,\frac{\partial S}{\partial q_1})+\cdots+h_n(q_n,\frac{\partial S}{\partial q_n})=E(\alpha)
$$

左辺は

$$
h_i(q_i,\frac{\partial S}{\partial q_i})=h_i(q_i,\frac{\partial G}{\partial q_i})
$$

なので、G を

$$
G(q,\alpha)=g_1(q_1,\alpha_1)+\cdots+g_n(q_n,\alpha_n)
$$

と分解でき

$$
h_1(q_1,\frac{\partial g_1}{\partial q_1})+\cdots+h_n(q_n,\frac{\partial g_n}{\partial q_n})=E(\alpha)
$$

左辺の各項はそれぞれが q_i に依存しており、その和は定数になります。このため、左辺の各項は定数です。右辺は定数 α_i に依存しているので、左辺の各項は α_i に依存するとして

$$
h_i(q_i,\frac{\partial g_i}{\partial q_i})=e_i(\alpha_i)
$$

e_i は適当な関数で、$E(\alpha)$ は

$$
E(\alpha)=e_1(\alpha_1)+\cdots+e_n(\alpha_n)
$$

自由粒子の場合はこれにそのまま当てはまります。ハミルトニアンは

$$
H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)=h_x+h_y+h_z
$$

となっているので、S の形を

$$S = g_x(x, \alpha_x) + g_y(y, \alpha_y) + g_z(z, \alpha_z) - E(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)t$$

と仮定でき、ハミルトン・ヤコビ方程式は

$$0 = \frac{1}{2m}\big((\frac{\partial S}{\partial x})^2 + (\frac{\partial S}{\partial y})^2 + (\frac{\partial S}{\partial z})^2\big) + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m}\big((\frac{\partial g_x}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g_y}{\partial y})^2 + (\frac{\partial g_z}{\partial z})^2\big) + \frac{\partial}{\partial t}(Et)$$

これらは (4),(5) と同じです。

循環座標を含む例として、中心力によるポテンシャル $U(r)$ がある場合を求めます。まず、極座標でハミルトニアンを書きます。極座標 (r, θ, ϕ) は

$$x = r\cos\theta\sin\phi \ , \ y = r\sin\theta\sin\phi \ , \ z = r\cos\phi$$

運動量はラグランジアン L から

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

「$\cdot$」は時間微分です。L は

$$\begin{aligned}
L = \frac{1}{2}m(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt})^2 - U(r) &= \frac{1}{2}m(\frac{d}{dt}(r\boldsymbol{e}_r))^2 - U(r) \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\boldsymbol{e}}_r)^2 - U(r) \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2(\dot{\boldsymbol{e}}_r)^2 + 2r\dot{r}\boldsymbol{e}_r \cdot \dot{\boldsymbol{e}}_r) - U(r) \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2(\dot{\boldsymbol{e}}_r)^2) - U(r) \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta) - U(r)
\end{aligned}$$

極座標の基底 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$ は (数学の「極座標」参照)

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_r = \frac{dr}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r} + \frac{d\theta}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} + \frac{d\phi}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \phi} = \boldsymbol{e}_\theta\frac{d\theta}{dt} + \boldsymbol{e}_\phi\frac{d\phi}{dt}\sin\theta$$

となっているのを使っています。これから運動量は

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \ , \ p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \ , \ p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta$$

と求まるので、ルジャンドル変換からハミルトニアンは

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} - L = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\phi^2) + U(r)$$

ϕ が循環座標です。

　ハミルトン・ヤコビ方程式は、p_r, p_θ, p_ϕ を $\partial S/\partial q_i$ に置き換えて

$$\frac{1}{2m}\big((\frac{\partial S}{\partial r})^2 + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial S}{\partial \theta})^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}(\frac{\partial S}{\partial \phi})^2\big) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

ハミルトニアンが時間を含んでいないので

$$S = G(r, \theta, \phi, \alpha) - E(\alpha)t$$

として、ハミルトン・ヤコビ方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2m}\big((\frac{\partial G}{\partial r})^2 + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial G}{\partial \theta})^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}(\frac{\partial G}{\partial \phi})^2\big) + U(r) &= E(\alpha) \\
r^2(\frac{\partial G}{\partial r})^2 + (\frac{\partial G}{\partial \theta})^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}(\frac{\partial G}{\partial \phi})^2 + 2mr^2U &= 2mr^2E \\
r^2\sin^2\theta\big((\frac{\partial G}{\partial r})^2 + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial G}{\partial \theta})^2 - 2m(E-U)\big) &= -(\frac{\partial G}{\partial \phi})^2
\end{aligned}$$

そして、G を変数で分けて

$$G = R(r, \alpha) + A(\theta, \alpha) + B(\phi, \alpha)$$

と仮定すると

$$r^2\sin^2\theta((\frac{\partial R}{\partial r})^2 + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial A}{\partial \theta})^2 - 2m(E-U)) = -(\frac{\partial B}{\partial \phi})^2$$

左辺に ϕ 依存性はないので、右辺は定数です。定数を $-C_\phi^2$ として

$$\begin{aligned}
&(\frac{\partial R}{\partial r})^2 + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial A}{\partial \theta})^2 + \frac{C_\phi^2}{r^2\sin^2\theta} = 2m(E-U) \\
&(\frac{\partial B}{\partial \phi})^2 = C_\phi^2
\end{aligned}$$

そして

$$r^2(\frac{dR}{dr})^2 + (\frac{dA}{d\theta})^2 + \frac{C_\phi^2}{\sin^2\theta} = 2mr^2(E-U)$$

$$r^2\big(\frac{1}{2m}(\frac{dR}{dr})^2 - (E-U(r))\big) = -\frac{1}{2m}\big((\frac{dA}{d\theta})^2 + \frac{C_\phi^2}{\sin^2\theta}\big)$$

左辺は r、右辺は θ に依存しているので、定数 $-C^2/2m$ として

$$r^2(\frac{1}{2m}(\frac{dR}{dr})^2 - (E-U)) = -\frac{C^2}{2m}$$

$$R(r,C) = \pm\int dr\sqrt{2m(E-U) - \frac{C^2}{r^2}}$$

A は

$$A(\theta,C,C_\phi) = \pm\int d\theta\sqrt{C^2 - \frac{C_\phi^2}{\sin^2\theta}}$$

B の符号は C_ϕ で決まるので $\pm$ は必要なく

$$B(\phi,C_\phi) = C_\phi\phi$$

これらから

$$S(r,\theta,\phi,E,C,C_\phi,t) = -Et + C_\phi\phi \pm\int dr\sqrt{2m(E-U) - \frac{C^2}{r^2}} \pm\int d\theta\sqrt{C^2 - \frac{C_\phi^2}{\sin^2\theta}}$$

循環座標 ϕ の項が $C_\phi\phi$ として出てきています。このように、循環座標がいるときは S を (3) と仮定できます。運動量は

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \pm\sqrt{2m(E-U) - \frac{C^2}{r^2}}$$

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial\theta} = \pm\sqrt{C^2 - \frac{C_\phi^2}{\sin^2\theta}}$$

$$p_\phi = \frac{\partial S}{\partial\phi} = C_\phi$$

符号は運藤量の方向に合わせて決まります。

定数が何を表すのかは角運動量を見れば分かります。角運動量を $\boldsymbol{L}$ として

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p} = m(r\boldsymbol{e}_r) \times \frac{d}{dt}(r\boldsymbol{e}_r) = mr\boldsymbol{e}_r \times (\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\boldsymbol{e}}_r) &= mr^2\boldsymbol{e}_r \times \dot{\boldsymbol{e}}_r \\
&= mr^2\boldsymbol{e}_r \times (\boldsymbol{e}_\theta \frac{d\theta}{dt} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{d\phi}{dt}\sin\theta) \\
&= \boldsymbol{e}_\phi mr^2\dot{\theta} - \boldsymbol{e}_\theta \dot{\phi}\sin\theta \\
&= p_\theta \boldsymbol{e}_\phi - \frac{p_\phi}{\sin\theta}\boldsymbol{e}_\theta
\end{aligned}
$$

z 成分は、デカルト座標の基底 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ との関係

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_x \cos\theta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y \cos\theta\sin\varphi - \boldsymbol{e}_z \sin\theta \\
&\boldsymbol{e}_\phi = -\boldsymbol{e}_x \sin\varphi + \boldsymbol{e}_y \cos\varphi
\end{aligned}
$$

から、$L_z = p_\phi$ となるので、C_ϕ は角運動量の z 成分 L_z です。そして

$$
p_\theta^2 + \frac{p_\phi}{\sin^2\theta} = C^2 \ , \ \boldsymbol{L}^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}
$$

から、$|C|$ は角運動量の大きさ $L = |\boldsymbol{L}|$ です。角運動量に置き換えれば

$$
\begin{aligned}
&S(r,\theta,\phi,E,L,L_z,t) = -Et + L_z\phi \pm \int dr\sqrt{2m(E-U) - \frac{L^2}{r^2}} \pm \int d\theta\sqrt{L^2 - \frac{L_z}{\sin^2\theta}} \\
&p_r = \pm\sqrt{2m(E-U) - \frac{L^2}{r^2}} \\
&p_\theta = \pm\sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2\theta}} \\
&p_\phi = L_z
\end{aligned}
$$

α_i に対応する 3 つの定数 E, L, L_z が求まったので、それらによる微分から $Q_i = \beta_i$ は

$$
\begin{aligned}
&\beta_E = \frac{\partial S}{\partial E} = \pm\int dr\frac{m}{\sqrt{2m(E-U) - \frac{L^2}{r^2}}} - t \\
&\beta_L = \frac{\partial S}{\partial L} = \mp\int dr\frac{1}{\sqrt{2m(E-U) - \frac{L^2}{r^2}}}\frac{L}{r^2} \pm \int d\theta\frac{L}{\sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2\theta}}} \\
&\beta_z = \frac{\partial S}{\partial L_z} = \mp\int d\theta\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{L_z}{\sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2\theta}}} + \phi
\end{aligned}
$$

ルート部分でポテンシャルを

$$2m(E-U)-\frac{L^2}{r^2}=2mE-2m(U-\frac{L^2}{2mr^2})=2m(E-V)$$

と置き換えれば、中心力による運動の式の形になります。このことから、β_E の式は粒子の位置の時間依存性、β_L の式は位置の角度依存性を与えます (力学の「中心力による運動」参照)。

β_z が何かを見るために積分を行います。z 軸との角度を γ $(0\leq\gamma\leq\pi)$ として $L_z=L\cos\gamma$ とすれば

$$\beta_z-\phi=\mp\int d\theta\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\cos\gamma}{\sqrt{1-\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\theta}}}$$

ルート部分は

$$\begin{aligned}
1-\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\gamma}{\sin^2\theta}&=\frac{\sin^2\theta-(1-\sin^2\gamma)}{\sin^2\theta}\\
&=\frac{-(1-\sin^2\theta-\sin^2\gamma)}{\sin^2\theta}\\
&=\frac{\sin^2\gamma\sin^2\theta-(1-\sin^2\gamma)(1-\sin^2\theta)}{\sin^2\theta}\\
&=\frac{\sin^2\gamma\sin^2\theta-\cos^2\gamma\cos^2\theta}{\sin^2\theta}
\end{aligned}$$

と変形させれば

$$\frac{\cos\gamma}{\sqrt{1-\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\theta}}}=\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2\gamma\sin^2\theta-\cos^2\gamma\cos^2\theta}{\sin^2\gamma\sin^2\theta}}}=\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\cos^2\gamma\cos^2\theta}{\sin^2\gamma\sin^2\theta}}}$$

これに対して

$$\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\sin\Theta$$

とすれば

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}(\frac{-\sin\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta})&=\frac{d}{d\theta}\sin\Theta\\
-\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\frac{1}{\sin^2\theta}d\theta&=\cos\Theta d\Theta
\end{aligned}$$

から

$$
\begin{aligned}
\beta_z - \phi =& \mp \int d\theta \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\cos\gamma}{\sqrt{1-\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\theta}}} \\
=& \mp \int d\theta \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\cos^2\gamma\cos^2\theta}{\sin^2\gamma\sin^2\theta}}} \\
=& \pm \int d\Theta \frac{\cos\Theta}{\sqrt{1-\sin^2\Theta}} \\
=& \pm \int d\Theta \\
=& \pm \Theta \\
\sin(\beta_z - \phi) =& \pm \sin\Theta \\
=& \pm \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\
\sin\gamma\sin\theta\sin(\beta_z - \phi) =& \pm \cos\gamma\cos\theta
\end{aligned}
\tag{6}
$$

積分定数は無視しています。

これが何を表しているのかは、中心力での運動の特徴からわかります。中心力による軌道は角運動量と直交する 2 次元面に制限されているので、粒子の軌道 (位置) のベクトル $\boldsymbol{r}$ と角運動量 $\boldsymbol{L}$ の内積は 0 です。角運動量の z 成分は $L\cos\gamma$ としているので、極座標において $\boldsymbol{L}$ の方向は

$$
(\sin\gamma\cos\phi', \sin\gamma\sin\phi', \cos\gamma)
$$

ϕ' は xy 平面上の角度です。これと $\boldsymbol{r}$ が直交するので

$$
\begin{aligned}
(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)\cdot(\sin\gamma\cos\phi', \sin\gamma\sin\phi', \cos\gamma) =& \ 0 \\
\sin\gamma\cos\phi'\sin\theta\cos\phi + \sin\gamma\sin\phi'\sin\theta\sin\phi =& -\cos\gamma\cos\theta
\end{aligned}
$$

左辺を

$$
\begin{aligned}
\sin\gamma\sin\theta(\cos\phi'\cos\phi + \sin\phi'\sin\phi) =& \ \sin\gamma\sin\theta\cos(\phi' - \phi) \\
=& -\sin\gamma\sin\theta\sin(\phi' - \frac{\pi}{2} - \phi)
\end{aligned}
$$

と変形すれば

$$
\sin\gamma\sin\theta\sin(\phi' - \frac{\pi}{2} - \phi) = \cos\gamma\cos\theta
$$

これは (6) と同じです。よって、β_z の式は粒子の軌道面の関係 (θ と ϕ の関係) を与えます。