

オイラー・ラグランジュ方程式

解析力学の中心にいるオイラー・ラグランジュ方程式の説明をしていきます。そもそも解析力学は、経験的なニュートン力学を理論よりにするために作られたものです。この解析力学で使われる発想は量子論へ移行するさい重要になるので、量子論をやる人は解析力学をある程度やっておいた方がいいです (拘束系とかの話は出会わない人は全く出会わないですが、基本的なラグランジアンとハミルトニアン周りは必須です)。また、古典論である相対論においても当然重要なものです。

オイラー・ラグランジュ方程式には、数学での最短距離の問題 (変分問題) としての側面と (「補足：変分問題」参照)、ニュートンの運動方程式との対応としての側面があり、どちらの立場を取るかで導出の流れが変わります。ここではニュートンの運動方程式から求めます。

保存力 F が作用している質量 m を持つ質点の運動の軌道 $q(t)$ はニュートンの運動方程式によって

$$m\ddot{q} = F \quad (F = -\frac{\partial U}{\partial q})$$

このように与えられます。上についている「 \cdot 」ドットは時間微分 d/dt を表すとします。2つあるときは d^2/dt^2 です。 U はポテンシャル (位置エネルギー) で、力学的エネルギー E は保存しています。現実の粒子のある地点からある地点までの経路はこの方程式を解くことによってわかりますが、この経路から少しズレた経路というのを考えてみます。この仮想的な経路は現実の経路 $q(t)$ から $\delta q(t)$ だけズレた $q(t) + \delta q(t)$ になっているとします (ここでの δ はデルタ関数とかでなく微小量という意味でつけています)。この δq のことを変分 (variation) と呼んでいます。そして、経路の始点 $q(t_1)$ と終点 $q(t_2)$ は現実の経路と仮想の経路で同じだと設定します (つまり、始点から終点への間の経路が δq だけズレている)。そうすると条件として

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$

というのが出てきます。

ここでは他に dq が出てきますが、 dq は現実経路での微小変位、 δq は現実経路からの微小なズレという意味にしています。例えば、2変数 $q(u, v)$ としたとき、 dq と δq は微分によって

$$dq = q(u + du, v + dv) - q(u, v) = \frac{\partial q}{\partial u} du + \frac{\partial q}{\partial v} dv$$

$$\delta q = q(u + \delta u, v + \delta v) - q(u, v) = \frac{\partial q}{\partial u} \delta u + \frac{\partial q}{\partial v} \delta v$$

となります。そして、この δ は一般的に微分と積分の外に出せるという性質を持っており、 $q(u)$ に対して

$$\frac{d}{du}(\delta q) = \delta \frac{dq}{du}$$

$$\int du \delta q = \delta \int du q$$

とできます。このことは、 dq が $q(u + du)$ と $q(u)$ の差を表す記号であるために、 d は q を $dq = q(u + du) - q(u)$ とする演算記号ととらえることで、 $dq(u)$ と $\delta q(u)$ が

$$\delta(dq) = \delta(q(u + du) - q(u)) = \delta q(u + du) - \delta q(u)$$

$$d(\delta q) = \delta q(u + du) - \delta q(u)$$

となっていて、これから $\delta(dq)$ と $d(\delta q)$ が一致していることから分かります。また、 δ は現実の経路から δq ズらすという意味を持った演算記号となっています。なので、 δf のように書かれた時は $\delta f = f(q + \delta q) - f(q)$ という意味になります。

これで状況設定は終わり、次に運動エネルギーを見ます。現実経路 (運動方程式で与えられる粒子の軌道) での運動エネルギーは

$$T(\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$$

これに対して、仮想経路では δq だけズレていることから

$$T(\dot{q} + \delta\dot{q}) = \frac{1}{2}m(\dot{q} + \delta\dot{q})^2$$

$$\left(\delta \frac{dq}{dt} = \frac{d\delta q}{dt}\right)$$

面倒だったので変数を書いてないだけで、 $\delta q(t)$ なので δq も時間を変数に持っています。なので、微分して $\delta\dot{q}$ としています。そうすると、運動エネルギーの変分は

$$\begin{aligned} \delta T &= T(\dot{q} + \delta\dot{q}) - T(\dot{q}) \\ &= \frac{m}{2}\{(\dot{q} + \delta\dot{q})^2 - \dot{q}^2\} \\ &= m\dot{q}\delta\dot{q} + \frac{m(\delta\dot{q})^2}{2} \end{aligned}$$

δq は微量だとしているので $(\delta\dot{q})^2$ は無視してしまい

$$\delta T = m\dot{q}\delta\dot{q}$$

この変分を時間で積分してみます (積分範囲は始点 t_1 から終点 t_2)

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt\delta T &= \int_{t_1}^{t_2} m\dot{q}\delta\dot{q} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(m \frac{d}{dt} \dot{q}\delta q - m\ddot{q}\delta q \right) \\ &= [m\dot{q}\delta q]_{t_1}^{t_2} - m \int_{t_1}^{t_2} dt\ddot{q}\delta q \\ &= m\dot{q}\delta q(t_2) - m\dot{q}\delta q(t_1) - m \int_{t_1}^{t_2} dt\ddot{q}\delta q \\ &= -m \int_{t_1}^{t_2} dt\ddot{q}\delta q \end{aligned}$$

最後へは条件 $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ より、第一項と第二項が 0 になるからです。ここにニュートンの運動方程式を代入して

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\delta T = \int_{t_1}^{t_2} dt\delta q \frac{\partial U}{\partial q} = \int_{t_1}^{t_2} dt\delta U$$

これは、 $U(q)$ なので

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial q} \delta q$$

という変分に対する全微分になることを利用しています。よって、この式は

$$\int_{t_1}^{t_2} dt(\delta T - \delta U) = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt(T - U) = 0$$

こんな関係を持っていることがわかります。 δT は $\delta \dot{q}$ 、 δU は δq になっていることに注意してください。ここでの $T - U$ をラグランジアン (Lagrangian) と呼び、 L で表されます (ラグランジアン自体は観測量に対応する物理量ではないことに注意)。見てわかるようにラグランジアン L はエネルギーの次元を持っており、これを時間積分した

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L, \quad S = \int_{t_1}^{t_2} dt L$$

この S のことを作用 (action) と呼びます。これが物理とどう関連するのは、導出の流れから分かるように、この作用 S の変分 δS が 0 になるときにエネルギー保存が満たされるという点です。エネルギー保存が満たされるということは、その経路は現実の経路に対応するという事です (途中でニュートンの運動方程式を入れることで出てくる)。これがハミルトン (Hamilton) の原理とか最小作用の原理 (principle of least action) とか変分原理 (variational principle) とか呼ばれているものです。言い換えれば、今やってきたように、 δL を積分した δS が $\delta S = 0$ となれば現実の質点の運動が記述できるという原理です。つまり、現実の質点は $\delta S = 0$ となるような経路を運動するという事です ($\delta S = 0$ となるような場合を S が停留値であるとも言います)。

ここでの話題とはそれですが、見てきたように変分原理は質点が現実の経路としてどのようなものを選ぶのかということを知りたいです。このことは一般相対論での曲がった時空での質点の描く軌道 (経路) がどのようなものなのかを知るためにも必要なことなので、相対論に進むときに変分原理について知っておくと測地線の話あたりでつまづく要素が減ります (相対論に行くなら、最短距離の問題からのオイラー・ラグランジュ方程式の導出も知っておいた方がいいです)。

ここからさらにラグランジアンを見ていきます。ラグランジアンの変数は、運動エネルギーの変数 \dot{q} とポテンシャルの変数 q から、 q と \dot{q} を持っていると考えられます (ここでは 1 次元で考え、後で一般化します)。注意すべきは、 \dot{q} は q の時間微分なので q と関係しているように見えますが、 q と無関係だとしているという点です。これは上で見たように、 δT と δU を別々に扱ったためです。というわけで、ラグランジアンは x, y を変数に持つ関数 $f(x, y)$ での x, y が q, \dot{q} になっているものとして扱います。そうすると、ラグランジアンの変分は、 q と \dot{q} を独立にとるので

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$$

これの第二項に

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$$

としたものを入れて

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q$$

これを時間積分します

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} dt \delta L &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right\} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) + \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right\} \\
&= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right\} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta q \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right\}
\end{aligned}$$

3行目での第一項は $\delta q(t_2) = \delta q(t_1) = 0$ から消えます。で、これが現実の運動 (経路) に一致するためには、どんな δq に対しても 0 にならなければいけないので

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

となる必要があります (本来は証明が必要)。これがラグランジアン L が満たす方程式である、オイラー・ラグランジュ方程式 (Euler-Lagrange equation) です。

これを 1次元でなく 3次元としたければ

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \delta L = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^3 \delta q_i \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right\} = 0$$

なので

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$$

q_i は粒子の軌道を表すものという以外の制限を与えていないので、 $q_i = (q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$ としてもいいですし、極座標 $q_i = (r, \theta, \phi)$ としてもいいです (下の補足 2 参照)。これは質点が 1 個の場合ですが、 N 個あり尚且つ 3次元だったとしても、この q_i の範囲を $1 \sim 3N$ に変えるだけで済みます。このように一般化された座標 q_i のことを一般化座標と言います (下の補足 1 も参照)、オイラー・ラグランジュ方程式は座標系の選択で形を変えません。

ラグランジアンに戻ります。ここまでの話は $L(q, \dot{q})$ でしたが、変数として時間を含んでいる $L(q, \dot{q}, t)$ の場合でも成立します (δt はないので δL は同じ)。このようなときに、ラグランジアンは時間を陽に含んでいるとかあらわに含んでいると言います (t の偏微分が出てくる)。例えば

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{a}{q}$$

みたいなときには、明らかに q と \dot{q} を変数にしていることがわかり、 t を陽に含んでいないと表現されます (q を通してのみ t の依存性を持っている)。これに何か適当に

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{a}{q} + bt$$

このように式の中に思いっきり t が入ってくるときに、陽に含んでいると言います。陽に含まないと言わずに、ラグランジアンは時間依存性を持っていないや、明確に時間依存していないと言うこともあります。 t を陽に含んでいると微分の連鎖則から

$$\frac{dL(q, \dot{q}, t)}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

となることに注意してください。

作用 S についての条件をもう少しちゃんと示しておきます。ここまでの話は、時間 t_1 での点 a から時間 t_2 での点 b までの経路は多数存在し、それぞれに対応した S が計算され、それらの内で現実の経路となるのは S を最小にするものだけということです。このことを言い換えれば、 S を微分したときに極値となるものが現実の経路だけということです。この、 S が極値を持つということが最小作用の原理 (ハミルトンの原理) の正確な表現です。よって、 $S(q + \delta q)$ を展開した時に 1 次の項は 0 になっている必要があります。この話は「補足：変分問題」でしています。

ここからオイラー・ラグランジュ方程式をどう使うのかを例を出して見ていきます。ちなみに、電磁場ありでのラグランジアンは量子力学の「パウリ方程式」のところに載せています。

簡単な例を見ます。 x 軸を横に y 軸を縦にとり (上方向を正)、糸の長さ l 、重りの質量 m の振り子が y 軸で静止しているとし、角度 θ (θ を一般化座標とする) で振動するとします (張力は無視します)。そうすると運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

そして、 x と y は θ を使えば

$$x = l \sin \theta, \quad y = l(1 - \cos \theta)$$

$$\dot{x} = l\dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{y} = l\dot{\theta} \sin \theta$$

となるので、 θ だけでオイラー・ラグランジュ方程式は書けます (自由度が 1)。静止している振り子の位置 ($\theta = 0$) を原点に取っています。これらから T は

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

原点を基準にしたポテンシャルは

$$U = mgl(1 - \cos \theta)$$

なので、ラグランジアン L は

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta)$$

このラグランジアンでの U は基準の位置や y 軸の方向で変わりますが、結果には影響しません。これを角度 θ に対するオイラー・ラグランジュ方程式に入れて

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = -mgl \sin \theta - ml^2\ddot{\theta} = 0$$

よって

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

となって、単振り子の運動方程式が出てきます。そして θ が微小だと思えば

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$$

なので

$$\theta = A \cos(\omega t + C) \quad (\omega = \sqrt{\frac{g}{l}})$$

という単振動での一般解が出てきます。

これで具体的にわかったように、オイラー・ラグランジュ方程式はニュートンの運動方程式と同じもので、ニュートンの方程式と違う点はどんな座標系を選ぼうともオイラー・ラグランジュ方程式の形は変わらないという点です。これがオイラー・ラグランジュ方程式の利点で、ニュートンの運動方程式のように座標系(例えば直交座標とか極座標)によって形を変えてしまうということがおきません。このようなことを可能にするためにわざわざ物理量でもないラグランジアン $L(q, \dot{q})$ というのを定義しています。

言葉の定義を簡単に与えておきます。自由粒子のラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

を $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ でそれぞれ微分してみると

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

となり、これらは運動量です。つまり、一般化座標 q による \dot{q} でラグランジアンを微分すると、対応する運動量が出てきます。これは一般化運動量と呼ばれ

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

と定義されます。

そして、自由粒子でのオイラー・ラグランジュ方程式は $\partial L/\partial x, \partial L/\partial y, \partial L/\partial z$ の項が 0 なので

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (q_i = x, y, z) \tag{1}$$

となっていて、これに一般化運動量の定義を入れると

$$\frac{d}{dt} p_i = 0$$

となり、運動量の保存を表すことになります。よって、オイラー・ラグランジュ方程式が (1) の形になっていれば運動量保存が必ず出てきます。つまり、ラグランジアンに q_i がいなければ運動量保存は出てきません ($\partial L/\partial q_i = 0$)。このようにラグランジアンに出てこない座標のことを循環座標 (cyclic coordinate) と呼びます。例えば、3次元の自由粒子では x, y, z が循環座標、自由粒子に重力によるポテンシャル $U = mgz$ があるなら x, y が循環座標となります。

自由粒子と調和振動子の場合での作用の積分を実行してみます。自由粒子では

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \quad (q(t_1) = q_1, q(t_2) = q_2)$$

この積分を実行するんですが、このときの軌道は最短の直線であり、それは最小作用の原理 (オイラー・ラグランジュ方程式) より

$$m\ddot{q} = 0$$

に従う軌道です。なので、これを解くと

$$\dot{q} = A$$

$$q(t) = At + C$$

A, C は時間独立です。後は条件として $q(t_1) = q_1$, $q(t_2) = q_2$ を入れれば

$$q_1 = At_1 + C, \quad q_2 = At_2 + C$$

これより

$$A = \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1}$$

そうすると、 \dot{q} は

$$\dot{q} = \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1}$$

なので

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2} m \left(\frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1} \right)^2 (t_2 - t_1) \\ &= \frac{1}{2} m \frac{(q_2 - q_1)^2}{t_2 - t_1} \end{aligned}$$

これが自由粒子での最短軌道の作用となります。

次に調和振動子 (バネの振動) の場合を見ていきます。ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

で与えられ、自由粒子のときと同様にオイラー・ラグランジュ方程式から最短軌道 (運動方程式) は

$$m\ddot{q} + m\omega^2 q = 0$$

と求まります。この方程式は演算子法によって

$$(D^2 + \omega^2)q = (D + i\omega)(D - i\omega)q = 0$$

なので

$$q(t) = C_1 \exp[i\omega t] + C_2 \exp[-i\omega t] = C_1 \cos \omega t + C_2 \cos \omega t$$

そして、 $t = t_0$ から $t = t_f$ へ進むとして

$$q(t_0) = q_0, \quad q(t_f) = q_f$$

このように設定すれば

$$q(t_0) = q_0 = C_1 \cos \omega t_0 + C_2 \cos \omega t_0$$

$$q(t_f) = q_f = C_1 \cos \omega t_f + C_2 \cos \omega t_f$$

これを満たすように q を作ると

$$q(t) = q_0 \cos(\omega(t - t_0)) + \frac{q_f - q_0 \cos(\omega(t_f - t_0))}{\sin(\omega(t_f - t_0))} \sin(\omega(t - t_0))$$

実際に $t = t_0$ では \sin は消えるので第一項だけが残り q_0 となり、 $t = t_f$ では第一項と第二項が上手いこと打ち消しあって q_f になります。作用積分は部分積分によって (q は時間依存していることに注意)

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_0}^{t_f} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} m q \dot{q} \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} dt \frac{1}{2} m q \ddot{q} - \int_{t_0}^{t_f} dt \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \\ &= \frac{1}{2} m q \dot{q} \Big|_{t_0}^{t_f} - \frac{1}{2} m \int_{t_0}^{t_f} dt [\ddot{q} + \omega^2 q] q \end{aligned}$$

第二項は最短軌道の式 (運動方程式) より 0 なので

$$S = \frac{1}{2} m q \dot{q} \Big|_{t_0}^{t_f}$$

そして、これに q の形を入れると ($\tau = t_f - t_0$)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} m \left(q_0 \cos \omega \tau + \frac{q_f - q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} \sin \omega \tau \right) \left(-q_0 \omega \sin \omega \tau + \omega \frac{q_f - q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} \cos \omega \tau \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} m \left[q_0 \cos(\omega(t_0 - t_0)) + \frac{q_f - q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} \sin(\omega(t_0 - t_0)) \right] \\ &\quad \times \left[-q_0 \omega \sin(\omega(t_0 - t_0)) + \omega \frac{q_f - q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} \cos(\omega(t_0 - t_0)) \right] \\ &= \frac{1}{2} m \left(q_0 \cos \omega \tau + \frac{q_f - q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} \sin \omega \tau \right) \left(-q_0 \omega \sin \omega \tau + \omega \frac{q_f - q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} \cos \omega \tau \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} m \left(q_0 \omega \frac{q_f - q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} \right) \end{aligned}$$

第一項は

$$\begin{aligned}
& (q_0 \cos \omega \tau + \frac{q_f - q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} \sin \omega \tau) (-q_0 \omega \sin \omega \tau + \omega \frac{q_f - q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} \cos \omega \tau) \\
&= -q_0^2 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau + q_0 \omega \frac{q_f - q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} \cos^2 \omega \tau \\
&\quad - q_0 \omega \frac{q_f - q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} \sin^2 \omega \tau + \omega (\frac{q_f - q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau})^2 \sin \omega \tau \cos \omega \tau \\
&= -q_0^2 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau + q_0 \omega \frac{q_f - q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} (1 - \sin^2 \omega \tau) \\
&\quad - q_0 \omega (q_f - q_0 \cos \omega \tau) \sin \omega \tau + \omega \frac{q_f^2 + q_0^2 \cos^2 \omega \tau - 2q_f q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} \cos \omega \tau \\
&= -q_0^2 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau + q_0 \omega \frac{q_f - q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} - q_0 \omega (q_f - q_0 \cos \omega \tau) \sin \omega \tau \\
&\quad - q_0 \omega (q_f - q_0 \cos \omega \tau) \sin \omega \tau + \omega \frac{q_f^2 + q_0^2 \cos^2 \omega \tau - 2q_f q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} \cos \omega \tau \\
&= -q_0^2 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau + q_0 \omega \frac{q_f - q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} - 2q_0 \omega (q_f - q_0 \cos \omega \tau) \sin \omega \tau \\
&\quad + \omega \frac{q_f^2 + q_0^2 \cos^2 \omega \tau - 2q_f q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} \cos \omega \tau \\
&= -q_0^2 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau + q_0 \omega \frac{q_f - q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} - 2q_0 q_f \omega \sin \omega \tau + 2q_0^2 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau \\
&\quad + \omega \frac{q_f^2 + q_0^2 \cos^2 \omega \tau - 2q_f q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} \cos \omega \tau \\
&= q_0 \omega \frac{q_f - q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} - 2q_0 q_f \omega \sin \omega \tau + q_0^2 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau + \omega \frac{q_f^2 + q_0^2 \cos^2 \omega \tau - 2q_f q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} \cos \omega \tau \\
&= q_0 \omega \frac{q_f - q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} + q_0^2 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau \\
&\quad + \frac{-2q_0 q_f \omega \sin^2 \omega \tau}{\sin \omega \tau} + \omega \frac{q_f^2 \cos \omega \tau + q_0^2 (1 - \sin^2 \omega \tau) \cos \omega \tau - 2q_f q_0 + 2q_f q_0 \sin^2 \omega \tau}{\sin \omega \tau} \\
&= q_0 \omega \frac{q_f - q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} + q_0^2 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau \\
&\quad + \frac{-2q_0 q_f \omega \sin^2 \omega \tau}{\sin \omega \tau} + \omega \frac{q_f^2 \cos \omega \tau + q_0^2 \cos \omega \tau - q_0^2 \sin^2 \omega \tau \cos \omega \tau - 2q_f q_0 + 2q_f q_0 \sin^2 \omega \tau}{\sin \omega \tau} \\
&= q_0 \omega \frac{q_f - q_0 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} \\
&\quad + \frac{-2q_0 q_f \omega \sin^2 \omega \tau}{\sin \omega \tau} + \omega \frac{q_f^2 \cos \omega \tau + q_0^2 \cos \omega \tau - 2q_f q_0 + 2q_f q_0 \sin^2 \omega \tau}{\sin \omega \tau} \\
&= \omega \frac{q_0 q_f - q_0^2 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} + \omega \frac{q_f^2 \cos \omega \tau + q_0^2 \cos \omega \tau - 2q_f q_0}{\sin \omega \tau} \\
&= \omega \frac{q_f^2 \cos \omega \tau - q_f q_0}{\sin \omega \tau}
\end{aligned}$$

第二項とあわせれば

$$S = \frac{m}{2} \left(\omega \frac{q_f^2 \cos \omega \tau - q_f q_0}{\sin \omega \tau} - \omega \frac{q_f q_0 - q_0^2 \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} \right) = \frac{m\omega}{2 \sin \omega \tau} ((q_f^2 + q_0^2) \cos \omega \tau - 2q_f q_0)$$

となります。

また、 $q(t)$ を \cos でなく \sin で書けば

$$q(t) = \frac{q_f \sin(\omega(t - t_0)) + q_0 \sin(\omega(t_f - t))}{\sin(\omega(t_f - t_0))}$$

と書くこともでき、これでも同じ結果を出します。

今度は工学系の方でよく使われるものを計算してみます。微分方程式のちょっとした解法例みたいにもなっています。2次元の xy 平面で考えて、点 $P = (a, 0)$ と点 $Q = (b, 0)$ で両端が固定されている紐を用意します。 y 軸方向には重力がかかっているため、紐自身の重さによって垂れ下がっています。このとき紐の微小な領域でのポテンシャル ΔU は紐の断面積 A 、紐の質量密度 σ 、垂れ下がった紐の微小な長さ Δs 、重力定数 g によって

$$\Delta U = gyA\sigma\Delta s$$

紐の微小な長さ Δs は直線だと近似して $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ です。ここで紐の y 座標は x に依存していると考えて (xy 平面で U 字型の線になっているので、紐の y 座標は x の関数になっている)、 $y(x)$ とします。そうすると Δy は x 座標を x から $x + \Delta x$ に動かしたときの y の変化 $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ です。全ポテンシャルは x 軸の範囲 $a \sim b$ に渡って微小領域を足し合わせればいいので

$$U = \sum_i \Delta U_i$$

これだと x の微小領域 x_i で区切られているので、 $\Delta x \rightarrow 0$ 極限を取ります。そうすると

$$\begin{aligned} U &= gA\sigma \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i y(x_i) \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \\ &= gA\sigma \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i y(x_i) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \Delta x \end{aligned}$$

$\Delta x \rightarrow 0$ でルートの中の第二項は微分になり、和は積分になるので

$$U = gA\sigma \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

紐は動いていないので運動エネルギーは0となり、ラグランジアンは U で与えられます。このポテンシャルをオイラー・ラグランジュ方程式 (ラグランジアンの変数は y と $y' = dy/dx$)

$$\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial U}{\partial y'} = 0$$

に入れると

$$\begin{aligned}
0 &= (1 + y'^2)^{1/2} - \frac{d}{dx}(yy'(1 + y'^2)^{-1/2}) \\
(1 + y'^2)^{1/2} &= y'^2(1 + y'^2)^{-1/2} + yy''(1 + y'^2)^{-1/2} - yy'^2y''(1 + y'^2)^{-3/2} \\
1 + y'^2 &= y'^2 + yy'' - yy'^2y''(1 + y'^2)^{-1} \\
1 &= yy'' - yy'^2y''(1 + y'^2)^{-1} \\
1 + y'^2 &= yy''(1 + y'^2) - yy'^2y'' \\
1 + y'^2 &= yy'' + yy'^2y'' - yy'^2y'' \\
1 + y'^2 &= yy''
\end{aligned}$$

という微分方程式になります。これは

$$y' = p(x), \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{dp}{dy} = p \frac{dp}{dy}$$

として

$$\begin{aligned}
\frac{1 + p^2}{y} &= p \frac{dp}{dy} \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{p dp}{1 + p^2} \\
\int \frac{dy}{y} &= \frac{1}{2} \int \frac{dp^2}{1 + p^2} \\
\log y &= \frac{1}{2} \log(1 + p^2) + C
\end{aligned}$$

積分定数を $\log C$ として

$$\log y = \frac{1}{2} \log(1 + p^2) + \log C$$

$$\log y = \frac{1}{2} \log[C(1 + p^2)]$$

$$y = \sqrt{C(1 + p^2)}$$

$$p = \pm \sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2/C^2 - 1}} = \pm \int dx$$

$$C \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \pm \int dx \quad (z = y/C)$$

$$C \cosh^{-1} z = \pm (x + D)$$

$$y = C \cosh\left(\pm \frac{x + D}{C}\right)$$

D は積分定数で、 \cosh^{-1} は \cosh の逆双曲線関数です。積分は

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + a}} = \cosh^{-1} \frac{z}{\sqrt{|a|}} \quad (a < 0)$$

を使っています。 \cosh の性質

$$\cosh \theta = \cosh(-\theta)$$

から

$$\cosh\left(+\frac{x + D}{C}\right) = \cosh\left(-\frac{x + D}{C}\right)$$

なので

$$y = C \cosh\left(\frac{x + D}{C}\right)$$

が解になります。よって、オイラー・ラグランジュ方程式を満たす紐の y 座標 $y(x)$ はこのようになっています。最初の U の積分を見てみると、 U を作用 S だと見ることが出来ます。このため、最小作用の原理からポテンシャルが最小になっていると言えます。このようにポテンシャルを最小にする曲線 (今の場合は紐が作る線) をカテナリー曲線 (catenary)、もしくは懸垂線と言います。

話は逸れますが、カテナリー曲線は他の方法でも定義されています。まず、任意の曲線を用意します。その曲線を z 軸周りで回転させます。このときできる面の表面積を考えます。回転して出来た面上の微小な帯の面積 ΔA は半径 $y(x)$ の円にその厚さ $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + \Delta(y)^2}$ (曲線の微小な長さ) をかければいいので

$$\Delta A = 2\pi y \sqrt{(\Delta x)^2 + \Delta(y)^2}$$

なので面の表面積は上のポテンシャルのときと同じように考えて

$$A = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

となります。この式はポテンシャルの式と同じ格好をしています。なので、曲線を回転させて出来た面の表面積を最小にするものがカタナリー曲線と定義することもできます。

さらについでの話として力学っぽく求めた場合も示しておきます。今の状況はようは重力と紐の張力のつりあいを見ているだけなので、つりあいの式は張力を T として

$$Ty'' \Delta x = gA\sigma \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

と書けます。左辺が張力部分で右辺が重力部分です (力学の「弦の振動」で弦の微小な長さを δx と近似していない場合)。微小部分は微分に変えて変形していくと

$$Ty'' = gA\sigma \sqrt{1 + y'^2}$$

$$y'' = a \sqrt{1 + y'^2} \quad (a = gA\sigma/T)$$

$y' = p(x)$ として $y'' = dp/dx$ とすれば

$$\frac{dp}{dx} = a \sqrt{1 + p^2}$$

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = a(x + C)$$

$$\sinh^{-1} p = ax + C$$

$$p = \sinh(a(x + C))$$

$$\frac{dy}{dx} = \sinh(a(x + C))$$

$$y = \frac{1}{a} \cosh(a(x + C)) + D$$

となります。 C, D は積分定数で、途中の積分で

$$\int \frac{dp}{\sqrt{p^2 + a}} = \sinh^{-1} \frac{p}{\sqrt{a}} \quad (a > 0)$$

を使っています (\sinh^{-1} は \sinh の逆双曲線関数)。というわけで、運動方程式の解は

$$y = \frac{T}{gA\sigma} \cosh\left(\frac{gA\sigma}{T}(x + C)\right) + D$$

C, D は紐の位置を与えることで決まります。紐の長さとかを決めることで張力の値を求めたりも出来ます。例えば紐が原点を中心に対称だとすれば紐の端 $(x_0, y(x_0))$ と $(-x_0, y(-x_0))$ において $y(x_0) = y(-x_0)$ なので

$$\frac{T}{gA\sigma} \cosh\left(\frac{gA\sigma}{T}(x_0 + C)\right) + D = \frac{T}{gA\sigma} \cosh\left(\frac{gA\sigma}{T}(-x_0 + C)\right) + D$$

D はなんでもいいので $D = 0$ として、 $\cosh \theta = \cosh(-\theta)$ から $C = 0$ となるので

$$y = \frac{T}{gA\sigma} \cosh\left(\frac{gA\sigma}{T}x\right)$$

これに紐の長さや質量を入れることで張力が求まります。また、オイラー・ラグランジュ方程式から求めた場合でも同じように対称だとすると

$$y = C \cosh\left(\frac{x}{C}\right)$$

となって同じになります。このように両端を固定した物体の重力とのつりあいによる情報をカテナリー曲線は持っているので工学系ではよく使われます。

・補足 1

一般化座標の話をしっておきます。3次元だとして、一般化座標 q_i ($i = 1, 2, 3$) は形式的に

$$q_1 = f_1(x, y, z), \quad q_2 = f_2(x, y, z), \quad q_3 = f_3(x, y, z)$$

と書くと分かりやすいです。これは (x, y, z) の座標系から別の座標系 (q_1, q_2, q_3) への座標変換の式です (f_1, f_2, f_3 という関数に x, y, z を入れることで新しい座標 q_1, q_2, q_3 になる)。つまり、座標系を指定していないものとして一般化座標 (generalized coordinates) は与えられています。なので、一般化座標を使って記述しておけば、実際の問題を解くときに都合のいい座標系を選ぶことができます。

変換を f_1, f_2, f_3 としてますが、座標変換の式では慣習的に

$$q_1 = q_1(x, y, z), \quad q_2 = q_2(x, y, z), \quad q_3 = q_3(x, y, z)$$

と書くことが多いです。

また、逆変換

$$x = g_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = g_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = g_3(q_1, q_2, q_3)$$

が存在するためにはヤコビアンが 0 でなければいけません。

ちなみに、配置や配位 (configuration) というのは、全ての粒子の位置を表したものです。例えば 2 個の粒子が (x_1, y_1, z_1) と (x_2, y_2, z_2) にいるとき、 $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ としたものが配位です。一般化すれば (q_1, q_2, \dots, q_n) となり、 n は粒子数と次元で決まります。

一般化座標を使うときに大事になる自由度の話をしっておきます。力学や解析力学で自由度 (degree of freedom) と言った時は、大抵は物体の位置を決めるのに必要な独立変数の数を指します。例えば、2次元で 1 つの質点を考えたとき、質点の位置は 2 つの独立変数で決めることができます (xy 平面上なら (x, y))。この 2 というのが自由度です。質点が 2 つあれば、両方の質点の位置を決めるには $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ が必要なので、自由度は 4 です。

運動に制限がある時、自由度が落ちるとというのが大事な性質です。例えば、1 つの質点が半径 r の円運動しているなら、 $x^2 + y^2 = r^2$ の制限から x が y のどちらかを定めることで片方も決まるので、自由度は 2 でなく 1 です。このように条件 (拘束条件) を入れることで自由度を落とすことができます。また、円運動の自由度が 1 というのは独立変数が 1 つあれば質点の位置が決まると言っているのだから、例えば独立変数として角度 θ を選べば質点の位置は決まります。実際に角度 θ と固定された半径 r で質点の位置は決まります。このように自由度を考えるだけでも分かることがあるので、自由度の数は重要になっています。

これらのことから、必要となる一般化座標の数は自由度の数と一致しています (座標は独立変数なので当たり前といえば当たり前)。2次元の円運動で言えば、半径は r に固定されているので、一般化座標は 1 つです。そして、円運動なので、計算を具体的にを行うときには一般化座標を角度 θ にすると便利です (力学で円運動を扱うときには 2次元の極座標を使うのと同じ)。

自由度は分野によって何を指すのかが異なっていますが、基本的には状況を決めるのに必要な独立変数の数です。例えば、 2×2 の対称行列では自由度は 3 と言ったりします。これは対角成分と非対角成分の 1 つを決めれば、残った非対角成分は対称性から決まるからです (2×2 対称行列には 4 個の成分があり、自由に決められるのは対角成分の 2 個と非対角成分の片方の 1 個なので、自由度は $2 + 1 = 3$)。

・補足 2

座標変換でオイラー・ラグランジュ方程式が変わらないことを示します。変換前の座標を q_i 、変換後を Q_i とします ($i = 1, 2, 3$)。これらは

$$q_i = f_i(Q), \quad Q_i = \bar{f}_i(q)$$

と変換されているとします (\bar{f} は f の逆変換)。ラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ では q によるオイラー・ラグランジュ方程式になっています。変換後でのラグランジアン $L'(Q, \dot{Q}, t)$ も Q によるオイラー・ラグランジュ方程式になるかを見ます。

\dot{q}_i と \dot{Q}_i は

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{dt} f_i(Q_1, Q_2, Q_3) = \sum_{j=1}^3 \frac{dQ_j}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial Q_j} = \sum_{j=1}^3 \dot{Q}_j \frac{\partial f_i}{\partial Q_j}$$

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{d}{dt} \bar{f}_i(q_1, q_2, q_3) = \sum_{j=1}^3 \frac{dq_j}{dt} \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^3 \dot{q}_j \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial q_j}$$

変換前のラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ と変換後のラグランジアンを $L'(Q, \dot{Q}, t)$ とは

$$L(q, \dot{q}, t) = L(f(Q), \sum_{j=1}^3 \dot{Q}_j \frac{\partial f}{\partial Q_j}, t) = L'(Q, \dot{Q}, t)$$

となっています。

L' を Q_i で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial Q_i} &= \frac{\partial}{\partial Q_i} L(q, \dot{q}, t) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_j(Q)}{\partial Q_i} \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial}{\partial Q_i} \sum_{k=1}^3 \dot{Q}_k \frac{\partial f_j}{\partial Q_k} \right) \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_j}{\partial Q_i} \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{k=1}^3 \dot{Q}_k \frac{\partial^2 f_j}{\partial Q_i \partial Q_k} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Q, \dot{Q} は独立変数なので、 Q の微分は \dot{Q} と無関係です。 \dot{Q} の偏微分では、 $\partial f(Q)/\partial \dot{Q} = 0$ なので

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_i} L(q, \dot{q}, t) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial \dot{Q}_i} \sum_{k=1}^3 \dot{Q}_k \frac{\partial f_j}{\partial Q_k} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \\ &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{Q}_i} \frac{\partial f_j}{\partial Q_k} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_j}{\partial Q_i} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \end{aligned}$$

最後へは、 \dot{Q} の微分は $k = i$ のときが 1 で $k \neq i$ では 0 になるからです。これをさらに t で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_j}{\partial Q_i} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f_j}{\partial Q_i} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_j}{\partial Q_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{dQ_k}{dt} \frac{\partial^2 f_j}{\partial Q_k \partial Q_i} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_j}{\partial Q_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\end{aligned}$$

第一項は (2) から

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{dQ_k}{dt} \frac{\partial^2 f_j}{\partial Q_k \partial Q_i} \right) = \frac{\partial L'}{\partial Q_i} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_j}{\partial Q_i} \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

なので

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} &= \frac{\partial L'}{\partial Q_i} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_j}{\partial Q_i} \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_j}{\partial Q_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial Q_i} &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_j}{\partial Q_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right)\end{aligned}$$

L はオイラー・ラグランジュ方程式に従っていることから右辺は 0 になるので、 L' でも同じ形のオイラー・ラグランジュ方程式になることが分かります ($\partial f_j / \partial Q_i \neq 0$ は座標変換が可能なための条件)。